



## Разработка эквивалентной модели демпферного кольца с учётом упругого контакта по выступам

**Ло Чэн** аспирант кафедры конструкции и проектирования двигателей летательных аппаратов;  
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва, г. Самара;  
clpe@mail.nwpu.edu.cn

**Д. К. Новиков** доктор технических наук, профессор, профессор кафедры конструкции и проектирования двигателей летательных аппаратов;  
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва, г. Самара;  
novikovdk\_ssau@mail.ru

**Д. С. Дилигенский** кандидат технических наук, доцент кафедры конструкции и проектирования двигателей летательных аппаратов;  
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва, г. Самара;  
diligen@mail.ru

*Представлена разработка модели упругого кольца с учётом контактных явлений по выступам. В работе упругое демпферное кольцо моделируется набором прямых балок, соединённых шарнирами. Предложена методика расчёта средневзвешенной жёсткости участков кольца, содержащих выступы и гладкую упругую часть, которая необходима для дальнейшего расчёта жёсткости всего кольца.*

**Ключевые слова:** демпфер; упругое кольцо; жёсткость; балка

**Цитирование:** Чэн, Ло. Разработка эквивалентной модели демпферного кольца с учётом упругого контакта по выступам / Ло Чэн, Д. К. Новиков, Д. С. Дилигенский // Динамика и виброакустика. – 2024. – Т. 10, №1. – С. 21-28. DOI: 10.18287/2409-4579-2024-10-1-21-28

---

### Введение

В большинстве авиационных двигателей используются упругие опоры как ключевая часть конструкции для снижения вибрации. Опоры, имеющие тонкостенные кольца с выступами по наружным и внутренним поверхностям, нашли широкое применение в авиационных ГТД различных стран. В данной статье представлена разработка модели упругого кольца с учётом контактных явлений по выступам. В работе упругое демпферное кольцо моделируется набором прямых балок, соединённых шарнирами.

Детальное распределение зон контакта выступов упругого кольца рассчитывается численным методом. На основании численных расчётов делается некоторое обобщение картины работы выступов упругих колец в целом, вне зависимости от числа выступов и прочих габаритов.

Предложена методика расчёта средневзвешенной жёсткости участков кольца, содержащих выступы и гладкую упругую часть, которая необходима для дальнейшего расчёта жёсткости всего кольца.

### 1 Краткое описание модели

В работе рассматривается демпфер с упругим кольцом. В известных работах [1–4] жёсткость упругого кольца обычно определялась либо путём численного моделирования с помощью программного обеспечения и фактических измерений компонентов, либо аналитически. При аналитическом подходе каждый сегмент упругого кольца обычно рассматривается как независимая, жёстко закреплённая балка [5, 6] в форме дуги или прямой, а затем жёсткость каждого сегмента балки складывается для получения общей величины жёсткости.

В настоящей работе представлено моделирование упругого кольца с учётом контактных явлений по выступам. Расчётная схема кольца, использованная для анализа, представлена на рисунке 1. Физический смысл геометрических параметров и их величины, принятые для расчётов, приведены в таблице 1.

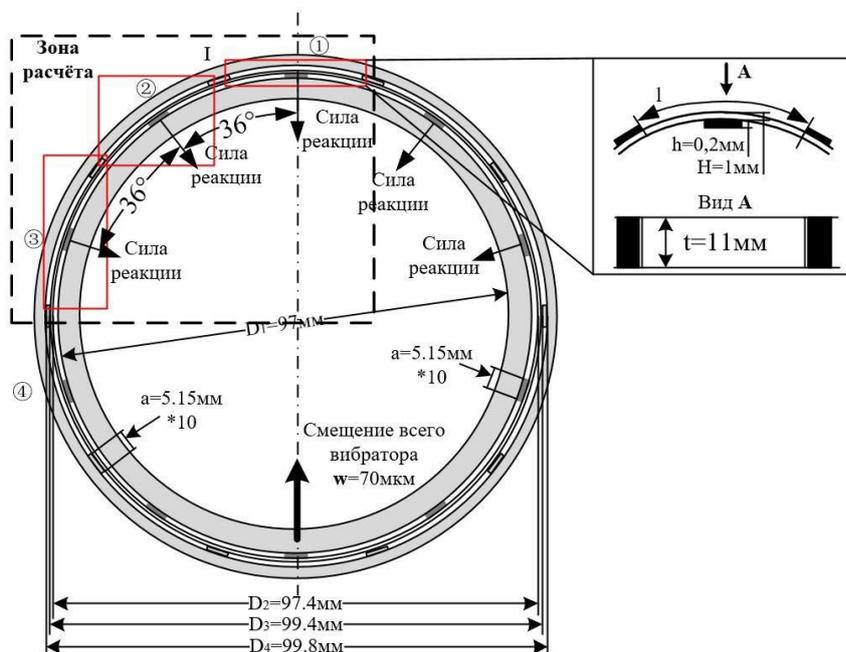


Рисунок 1 – Принципиальная схема поперечного сечения модели демпфера с упругим кольцом

Таблица 1 – Геометрические параметры упругого кольца

Обозначение параметра	Физический смысл	Величина
$D_1$	внутренний диаметр	97 мм
$D_2$	внутренний диаметр гладкой части кольца	97,4 мм
$D_3$	наружный диаметр гладкой части кольца	99,4 мм
$D_4$	наружный диаметр поперечного сечения упругого кольца демпфера	99,8 мм
$a$	ширина выступа	5,15 мм
$b$	длина упругой части кольца (рис.1-3).	10,3 мм
$l$	длина симметрической балки	25,75 мм
$H$	толщина кольца	1 мм
$h$	высота выступа	0,2 мм
$w$	заданная начальная деформация	70 мкм
$t$	ширина упругого кольца по оси	11 мм
$n$	число выступов упругого кольца	10

Упругое кольцо разделено на четыре сегмента (1, 2, 3, 4 в кружках). Как показано на рисунке 1, через центр первого сегмента (пронумерован) проходит ось симметрии.

Согласно работе [7], в случае посадки кольца с зазором нижняя часть кольца не работает.

## 2 Анализ влияния контактов по выступам упругих колец

Для оценки поведения упругого кольца в зонах контактов по выступам был проведён расчёт в среде Ansys Workbench 2021R2. Размеры соответствуют указанным в таблице 1. Контакты моделировались с учётом сил трения с возможностью проскальзывания в статической постановке. Параметры граничных условий, построение сетки и прочие настройки численной модели были выбраны на основе опыта моделирования данного типа демпферов.

Моделировались внутреннее внешнее корпусные кольца и упругое кольцо. Результаты численного расчёта упругого кольца при смещении вверх показаны на рисунке 2. Видно, что имеет место контактное взаимодействие между упругим и внешним кольцами. Числа на рисунке 2 соответствуют позициям на рисунке 1.

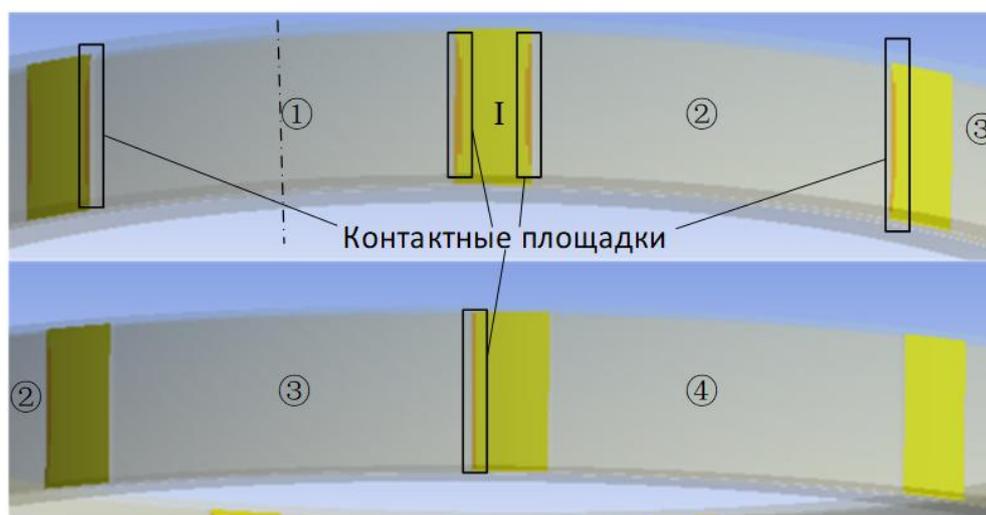


Рисунок 2 – Детальное распределение зон контактов по выступам упругих колец

Трение между контактными площадками не учитывалось. Светлые широкие полосы (отмечены арабскими цифрами) – это части кольца без контакта, между ними расположены крупные, более тёмные блоки – это поверхности выступов на упругом кольце, находящихся в состоянии проскальзывания. Выпуклость не полностью контактирует с внешним кольцом. Из-за сжатия выступ также деформируется (более тёмные области). Данная зона достаточно узкая и практически вырождается в прямую линию. Это даёт возможность представить прямую балку, расположенную между выступами, как балку с защемлёнными концами. В разработанной модели в качестве упрощения зона контакта представлена в виде шарнира, относительно которого смежные участки могут поворачиваться. Деформация на соответствующем сегменте кольца составляет менее 0,1 мм, а размер каждого выступа – 5 мм (0,02 в относительных величинах), деформация относительно размера сегмента невелика. Пренебрежём ей и представим модель, соответствующую сегменту дуги, в виде деформируемой прямой многоопорной неразрезной балки, схема которой показана на рисунке 3.

### 3 Схематизация упругого кольца

При исследовании упомянутой выше неразрезной балки основными параметрами, определяемыми при расчёте упругого кольца, являются концевые моменты и сила реакции в узле при деформации кольца (утолщения) за счёт перемещения наружного кольца подшипника.

Пунктирная линия в первой балке (①) является осью симметрии первой балки и всего кольца. Тёмно-серые прямоугольники обозначают внутренние выступы, которые соприкасаются с внешним кольцом. Светло-серые прямоугольники (к ним примыкают шарниры) обозначают внешние выступы, соприкасающиеся с наружным кольцом. Длина выступа обозначается, как и на рисунке 1, буквой  $a$ . Чёрные прямоугольники представляют собой гладкую упругую часть кольца без выступов длиной  $b$ . Сегмент I между ① и ② является внешним выступом. Из рисунка 2 видно, что оба края внешнего выступа соприкасаются с внешним кольцом (выделены прямоугольными рамками).

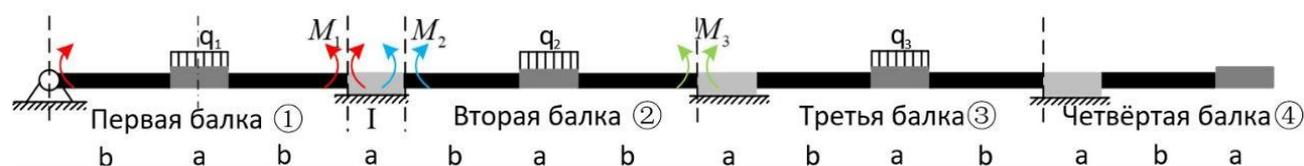


Рисунок 3 – Принципиальная схема упругого кольца, смоделированного в виде прямой неразрезной многоопорной балки

Поскольку внутренний выступ четвёртой балки упругого кольца расположен в нижней полуокружности, никакого давления на него не оказывается, поэтому он действует только как продолжение третьей балки упругого кольца при повороте относительно шарнира.

Такая система является статически неопределимой многоопорной балкой, в которой число неизвестных усилий и моментов больше количества уравнений статики. Основным приёмом раскрытия статической неопределимости является применение дифференциального уравнения изогнутой оси балки и его интегрирование.

Для этого необходимо исходную неразрезную статически неопределимую балку заменить на статически определимую балку, называемую основной [8, 9], расположив в опорных сечениях шарниры (рисунок 4). При этом в них возникнут добавочные неизвестные опорные моменты  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  над промежуточными опорами. Эти моменты, а также распределённые нагрузки  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ , приложенные к наружным выступам, определяются на основании решения статически определимой задачи. Методика их расчёта достаточно сложна и громоздка, поэтому в данной статье не приведена. Изгибающие моменты с обеих сторон равны и противоположны по знаку. Опорными сечениями будут являться концы внутренних выступов упругих колец.

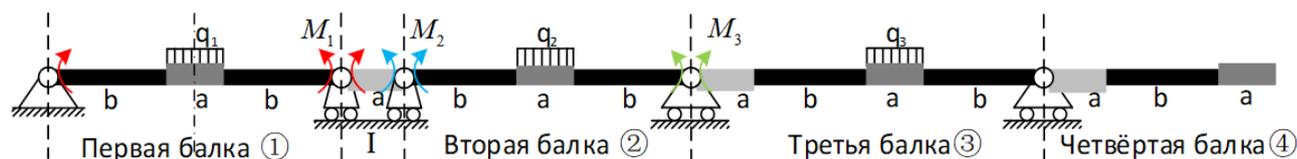


Рисунок 4 – Принципиальная схема модели первого сектора, состоящего из прямых балок (основная система)

Основная балка должна быть спроектирована таким образом, чтобы суммарные перемещения или деформации в шарнирах были равны нулю. Такое условие можно составить для

каждой из промежуточных опор и, значит, написать столько добавочных уравнений, сколько мы имеем неизвестных опорных моментов.

#### 4 Разработка методики определения средневзвешенной изгибной жёсткости кольца

При расчёте отклонения  $y$  и угла поворота  $\theta$  используется известное уравнение для упругой линии балки при изгибе [8,9]

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

где  $E$  – модуль упругости,  $I$  – момент инерции сечения балки при изгибе.

Интегрируя последовательно это уравнение, получим для  $\theta$  и  $y$  следующие выражения:

$$\begin{cases} \theta = \frac{dy}{dx} = -\int \frac{M}{EI} dx + C; \\ y = \int \theta dx = \int \left(-\int \frac{M}{EI} dx\right) dx + Cx + D, \end{cases} \quad (1)$$

где  $C$  и  $D$  – константы интегрирования, определяемые из граничных условий. Например, граничное условие для двухопорной балки на шарнирных опорах имеет вид: при  $x = 0$ ,  $\theta = 0$  и  $y = 0$ . Отсюда получаем значения для констант интегрирования:  $C = 0$  и  $D = 0$ .

Известно, что изгибающий момент равен распределённой нагрузке  $q$ , умноженной на квадрат длины  $l$  и  $c$  – константу, определяемую в процессе вычислений ( $M = cql^2$ ). Подставляя выражение для момента в формулы (1), получим для угла поворота и перемещения следующие выражения:

$$\begin{cases} EI\theta = c_{\theta}ql^3; \\ EIy = c_yql^4, \end{cases}$$

где  $c_{\theta}$  и  $c_y$  – константы, генерируемые в процессе вычислений.

Определим моменты инерции гладкого участка кольца и участка с выступом. Очевидно, что для гладкого участка кольца момент инерции (рисунок 5) имеет вид

$$I = tH^3/12, \quad (2)$$

а для участка с выступом

$$I = t(H + h)^3/12. \quad (3)$$

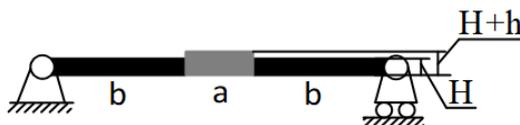


Рисунок 5 – Детальное распределение зон контактов по выступам упругих колец

Дальнейшие расчёты для одного сектора, содержащего гладкий участок с выступом, удобно вести с помощью арифметически средневзвешенной величины, определяемой известным уравнением:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i x_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} = \frac{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_n x_n}{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n},$$

где  $x_1, \dots, x_n$  – набор чисел с весами  $\omega_1, \dots, \omega_n$ . По аналогии для изгибной жёсткости определим её средневзвешенную величину следующим соотношением:

$$(EI) = \frac{(2b)^4(EI)_H + a^4(EI)_{H+h}}{(2b)^4 + a^4}, \quad (4)$$

где в качестве значений весов для величин изгибной жёсткости примем длины отрезков различной толщины.

Выражение (4) позволяет описать балку с выступом как балку с постоянным сечением с использованием всего одного выражения.

Принимая для материала кольца  $E = 2,11 \cdot 10^{11}$  Па, получим для изгибной жёсткости гладкого участка согласно формуле (2)  $(EI)_H = 0,1934H \cdot \text{м}^2$ , а для участка с выступом согласно формуле (3)  $(EI)_{H+h} = 0,3342H \cdot \text{м}^2$ .

Средневзвешенные жёсткости первой балки ① и второй балки ②, показанных на рисунке 4, определяются следующим образом:

$$(EI)_1 = (EI)_2 = \frac{(2b)^4(EI)_H + a^4(EI)_{H+h}}{(2b)^4 + a^4} = 0,1939 \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

Средневзвешенная жёсткость третьей балки ③ на рисунке 4:

$$(EI)_3 = \frac{(2b)^4(EI)_H + (2a)^4(EI)_{H+h}}{(2b)^4 + (2a)^4} = 0,2017 \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

### Заключение

1. Проведением численных расчётов показано, что зона контакта по выступам достаточно узкая и практически вырождается в прямую линию, что даёт возможность представить прямую балку, расположенную между выступами, как балку с закреплёнными концами.

2. Заменой дугообразных колец моделями прямых балок расчёт жёсткости упругих колец преобразуется в простую задачу классической механики.

3. Введено понятие средневзвешенной величины изгибной жёсткости, которая позволяет описать балку с выступом как балку с постоянным сечением с использованием всего одного выражения.

4. Рассчитаны средневзвешенные величины изгибной жёсткости для гладких участков колец и участков с выступами.

### Список использованных источников

1. Лобанов, В. К. Оценка демпфирующих свойств одного типа упругих опор ГТД. - Текст : электронный / В. К. Лобанов, А. Б. Хрусталева ; ответственный редактор А. И. Белоусов // Вибрационная прочность и надежность двигателей и систем летательных аппаратов : межвуз. сб. - Текст : электронный / М-во высш. и сред. спец. образования РСФСР, Куйбыш. авиац. ин-т им. С. П. Королева. – 1977. – Вып. 4. – С. 91-96
2. Леонтьев, М. К. Исследование характеристик упругих колец в опорах роторов газотурбинных двигателей [Текст] / М. К. Леонтьев, А. Г. Терешко // Вестник МАИ. – 2011. – Т.18, №3. – С. 135-146.
3. Wang, Z. Dynamic characteristics of elastic ring squeeze film damper [Text] / Z. Wang, Z. Liu, G. Zhang, // Industrial Lubrication and Tribology. – 2019. – vol. 71, №10. – pp. 1144-1151. DOI: 10.1108/ILT-04-2019-0125.

4. Кутаков, М. Н. Математические модели гидродинамических демпферов в задачах роторной динамики газотурбинных двигателей [Текст] / М. Н. Кутаков, С. А. Дегтярев, М. К. Леонтьев // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2017. – Т. 16, №1. – С. 115-128. DOI: 10.18287/2541-7533-2017-16-1-115-128.
5. Вайсфельд, А. А. Основы строительной механики: учебное пособие / А. А. Вайсфельд. – Хабаровск, 2003. – 58 с.
6. Вей Пэйцзы. Метод расчета метода распределения изгибающих моментов при проектировании неразрезных фундаментных балок / Вей Пэйцзы // Строительство в Китае. – 2015. – по. 6. – С. 90-93.
7. Артёмов, Е. А. Экспериментальное и расчётное определение податливости упругих колец турбомашин [текст] / Е. А. Артёмов // Известия вузов. Авиационная техника. – 1965. – №2. – С. 48-55.
8. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов: учебник / Н. М. Беляев. – Главная редакция физико-математической литературы издательства Наука, 1976. – 608 с.
9. Jing, Sun. A Simple Method to Solve the Problem of Beam deformed - Strange Function / Sun Jing // Журнал Хуайнаньского профессионально-технического колледжа. – 2004. – Т. 4, №3. – С. 100-101.

## Development of an equivalent model of a damping elastic ring considering elastic contact on bulges

**Luo Cheng** | Postgraduate Student of the Department of Construction and Design of Aircraft Engines;  
Samara National Research University, Samara;  
clpe@mail.nwpu.edu.cn

**D. K. Novikov** | Doctor of Science (Engineering), Professor, Professor of the Department of Construction and Design of Aircraft Engines;  
Samara National Research University, Samara;  
novikovdk\_ssau@mail.ru

**D. S. Diligenskiy** | Candidate of Science (Engineering), Associate Professor of the Department of Construction and Design of Aircraft Engines;  
Samara National Research University, Samara;  
diligen@mail.ru

*The study introduces a model of an elastic ring that takes into account contact conditions on bulges. The model represents the elastic damping ring as a series of straight beams connected by hinges. The methodology proposed herein calculates the average weighted stiffness of sections of the ring containing bulges and a smooth elastic part, which is essential for determining the overall stiffness of the entire ring.*

**Keywords:** damper; elastic ring; stiffness; beam

**Citation:** Cheng, Luo, Novikov, D. K. and Diligenskiy, D. S. (2024), "Development of an equivalent model of a damping elastic ring considering elastic contact on bulges", *Journal of Dynamics and Vibroacoustics*, vol. 10, no. 1, pp. 21–28. DOI: 10.18287/2409-4579-2024-10-1-21-28. (In Russian; abstract in English).

---

### References

1. Lobanov, V. K. (1977) "Evaluation of damping properties of a type of elastic supports for gas turbine engines. Text: electronic", *Vibrational strength and reliability of engines and aircraft systems: interuniversity collection*, Text: electronic, in A. I. Belousov (ed.), Ministry of Higher and Secondary Special Education of the RSFSR, Kuibyshev Aviation Institute named after S. P. Korolev, no. 4., pp. 91-96.
2. Leontiev, M.K. (2011), "Investigation of characteristics of elastic rings in rotor supports of gas turbine engines" [Text], *Bulletin of MAI*, vol. 18, pp. 135-146.
3. Wang, Z., Liu, Z. and Zhang, G. (2019), "Dynamic characteristics of elastic ring squeeze film damper" [Text], *Industrial Lubrication and Tribology*, vol. 71, №10, pp. 1144-1151, DOI: 10.1108/ILT-04-2019-0125.
4. Kutakov, M.N. (2017), "Mathematical models of hydrodynamic dampers in rotor dynamics problems of gas turbine engines" [Text], *Bulletin of Samara University. Aerospace engineering, technologies and machine building*, vol. 16, no.1, pp. 115-128, DOI: 10.18287/2541-7533-2017-16-1-115-128.
5. Vaisfeld, A.A. (2003), *Osnovy stroitel'noy mekhaniki: uchebnoe posobie* [Fundamentals of Structural Mechanics: textbook], Khabarovsk, 58 p. (In Russian).
6. Wei Peizhi (2015), "Calculation method for distributing bending moments in the design of non-split foundation beams", *Construction in China*, no. 6, pp. 90-93. (In Chinese; abstract in English).
7. Artyomov, E. A. (1965), "Experimental and Calculated Determination of Elastic Turbomachinery", *Izvestiya VUZov. Aviation Technology*, no. 2, pp. 48-55. (In Russian).
8. Belyaev, N. M. (1976), *Soprotivlenie materialov: uchebnik* [Strength of Materials: textbook], Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, Nauka [Main Editorial Office of Physical and Mathematical Literature, Science], 608 p. (In Russian).
9. Jing, Sun (2004), "A Simple Method to Solve the Problem of Beam deformed - Strange Function", *Journal of Huainan Vocational and Technical College*, vol. 4, no. 3, pp. 100-101. (In Chinese).