

**Прокофьев А.Б. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ В
ПРОСТРАНСТВЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ
ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СИСТЕМЫ
ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

Самарский государственный
аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королёва
(национальный исследовательский
университет)
443086, Россия, г. Самара,
Московское шоссе, 34
proka@mail.ru

Сафонов С.В.

Воронежский государственный
технический университет
394026, Россия, г. Воронеж,
Московский проспект, 14
safonov@vorstu.ru

Решена задача построения области устойчивости системы автоматического управления третьего порядка в трехмерном пространстве, координатами которого являются коэффициенты характеристического уравнения системы. Определены аналитические условия устойчивости такой системы. Проведен анализ характера изменения положения корней характеристического уравнения системы, а также вида переходного процесса при различных вариантах пересечения коэффициентами поверхности, ограничивающей область устойчивости в пространстве коэффициентов характеристического уравнения.

Ключевые слова: система автоматического управления; устойчивость; характеристическое уравнение; переходный процесс

Одним из основных требований, которым должна удовлетворять система автоматического управления (САУ), является устойчивость её работы, т.е. свойство системы возвращаться в исходное состояние после выхода её из этого состояния (в результате действия какого-либо возмущения) и прекращения действия возмущения [1-3]. При исследовании устойчивости большое практическое значение имеет построение областей устойчивости.

Большое число САУ различными техническими объектами может быть описано линейными дифференциальными уравнениями третьего порядка [4-6].

В настоящей работе исследуется устойчивость САУ третьего порядка в трехмерном пространстве, координатами которого являются коэффициенты характеристического уравнения системы.

Характеристическое уравнение системы третьего порядка имеет вид [1-3]:

$$D(r) = a_0 r^3 + a_1 r^2 + a_2 r + a_3 = 0, \quad (1)$$

где a_i – действительные коэффициенты;
 r – корни характеристического уравнения.

Нормализуем выражение (1), приведя его к виду, когда коэффициент при r^3 будет равен единице:

$$D(r) = r^3 + c_1 r^2 + c_2 r + c_3 = 0, \quad (2)$$

где $c_i = a_i/a_0$.

Представим себе пространство коэффициентов, по координатным осям которого отложены коэффициенты уравнения (2). Каждой точке этого пространства соответствуют конкретные численные значения коэффициентов уравнения (2) и соответствующий им полином третьей степени, который имеет три корня, зависящих от численных значений коэффициентов c_i . Если изменять коэффициенты c_i , то будут изменяться и значения корней выражения (2). Таким образом, с изменением коэффициентов c_i корни будут перемещаться в комплексной плоскости корней характеристического уравнения.

При некоторых значениях коэффициентов уравнения (2) один из корней попадает в начало координат или пара корней попадает на мнимую ось, т.е. корни будут равны $r_i = 0$ или $r_{i,i+1} = \pm j\omega_k$, и, следовательно, соответствующая точка в пространстве

коэффициентов будет удовлетворять уравнению:

$$D(j\omega) = (j\omega_k)^3 + c_1(j\omega_k)^2 + c_2(j\omega_k) + c_3 = 0, \quad (3)$$

т.к. условие нахождения САУ на границе устойчивости по Михайлову $D(j\omega) = 0$.

При $0 < \omega < +\infty$ этому уравнению соответствует некоторая поверхность Q . Если корни равны нулю или мнимые, то точка в пространстве коэффициентов попадает на эту поверхность Q .

Получим аналитическое соотношение для описания поверхности Q .

Из условия устойчивости линейной системы [1, 2] следуют три уравнения, определяющие три составляющие поверхности Q :

$$c_1 = 0,$$

$$c_2 = 0,$$

$$c_3 = 0.$$

Получим соотношение для описания четвертой составляющей поверхности Q . Для этого выполним преобразование выражения (3), опустив в нем индекс “ k ”:

$$-j\omega^3 - c_1\omega^2 + c_2j\omega + c_3 = 0.$$

Сгруппируем реальную и мнимую части:

$$(c_3 - c_1\omega^2) + j(c_2\omega - \omega^3) = 0.$$

Для решения последнего уравнения необходимо приравнять к нулю реальную и мнимую части:

$$c_2\omega - \omega^3 = 0, \quad (4)$$

$$c_3 - c_1\omega^2 = 0. \quad (5)$$

Из (4) следует, что $c_2 = \omega^2$. Из (5) $c_3 = c_1\omega^2$. Таким образом, можно записать:

$$c_3 = c_1c_2. \quad (6)$$

Изображение поверхности, описываемой выражением (6), в пространстве коэффициентов представлено на рисунке 1. Контурное изображение этой же поверхности представлено на рисунке 2. Построение поверхности проводилось при $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, так как только в этой области система может быть устойчива. Область устойчивости расположена «ниже» указанной поверхности.

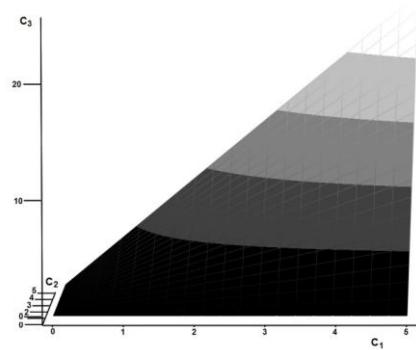


Рисунок 1. Изображение граничной поверхности в пространстве коэффициентов

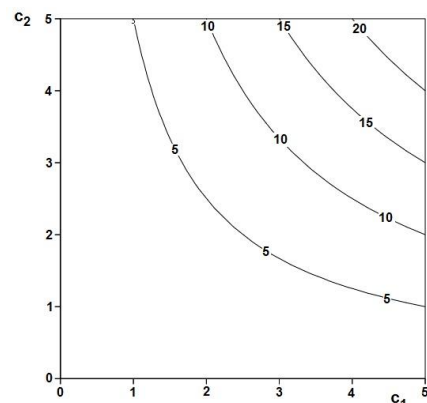


Рисунок 2. Проекция граничной поверхности на плоскость c_1 - c_2

Выражение (6) можно также получить, используя критерий устойчивости Рауса-Гурвица [1, 2]. Для этого из коэффициентов характеристического уравнения составим матрицу Гурвица, которая для САУ третьего порядка будет иметь размерность 3×3 :

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_3 & 0 \\ 1 & c_2 & 0 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с критерием Рауса-Гурвица для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все диагональные миноры матрицы Гурвица были положительными [1, 2]. Рассмотрим второй диагональный минор:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ 1 & c_2 \end{vmatrix} = c_1c_2 - c_3 > 0,$$

откуда следует, что

$$c_3 < c_1c_2,$$

т.е. условие нахождения коэффициента c_3 «под» поверхностью, определяемой выражением (6).

Таким образом, поверхность Q в пространстве коэффициентов характеристического уравнения, определяющая условия нахождения САУ на границе устойчивости, описывается соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} c_3 &= 0, \\ c_3 &= c_1 c_2, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

при $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$.

Исследуем поведение САУ при выходе её коэффициентов за пределы области, определяемой выражениями (7). При этом возможно четыре случая перехода коэффициентов характеристического уравнения за пределы указанной области:

- 1) через поверхность $c_3 = c_1 c_2$;
- 2) через поверхность $c_3 = 0$;
- 3) через положительную полуось c_1 ;
- 4) через положительную полуось c_2 .

Рассмотрим первый случай. При переходе коэффициентов характеристического уравнения через поверхность $c_3 = c_1 c_2$ «снизу-вверх» (т.е. из области устойчивости) знак вещественной части комплексно-сопряженных корней меняется с «-» на «+». Переходный процесс в САУ преобразуется из колебательного сходящегося к колебательному расходящемуся, т.е. система приобретает колебательную неустойчивость. Изменение вида характерного переходного процесса при пересечении коэффициентами характеристического уравнения поверхности $c_3 = c_1 c_2$ показано на рисунке 3.

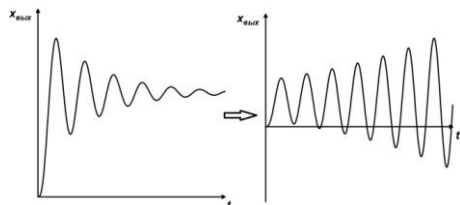


Рисунок 3. Изменение вида характерного переходного процесса при пересечении коэффициентами характеристического уравнения поверхности $c_3 = c_1 c_2$

Аналогичный анализ второго случая показывает, что при переходе коэффициентов через поверхность $c_3 = 0$ один из корней характеристического уравнения становится положительным. Система при этом приобретает асимптотическую неустойчивость. Характерные для второго случая переходные процессы представлены на рисунке 4.

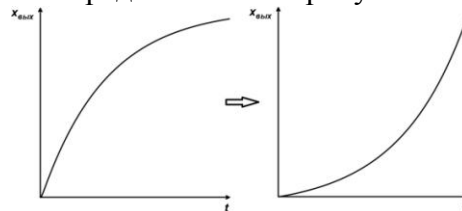


Рисунок 4. Изменение вида характерного переходного процесса при пересечении коэффициентами характеристического уравнения поверхности $c_3 = 0$

Рассмотрим третий случай. Для более глубокого понимания поведения САУ при переходных процессах исследуем сначала переход коэффициентов характеристического уравнения системы через прямую (ось) c_1 при их движении в плоскости $c_3 = 0$. При этом будем полагать, что $c_1 > 0$. При $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ и $c_3 = 0$ САУ будет находиться на границе устойчивости. Один из корней характеристического уравнения равен нулю, два других – вещественные отрицательные. Уменьшение коэффициента c_2 и его переход через ось c_1 в отрицательную область будет сопровождаться тем, что один из вещественных корней характеристического уравнения превратится из отрицательного в положительный, и САУ из граничного состояния устойчивости перейдет в состояние асимптотической неустойчивости (см. переходные процессы, изображенные на рисунке 5).

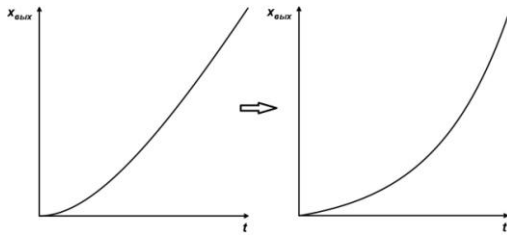


Рисунок 5. Изменение вида характерного переходного процесса при пересечении оси c_1 для случая движения коэффициентов характеристического уравнения в плоскости $c_3 = 0$

В рамках того же третьего случая рассмотрим переход коэффициентов характеристического уравнения через ось c_1 из области устойчивости, т.е. из области $c_3 > 0$ (но $c_3 < c_1 c_2$), $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, в область $c_2 < 0$, $c_3 < 0$ (см. рисунок 6). При таком переходе коэффициентов через ось c_1 из зоны устойчивости два комплексно-сопряженных корня характеристического уравнения с отрицательной вещественной частью меняются на два вещественных корня, один из которых положителен. Переходный процесс в САУ при этом превращается из колебательного сходящегося к экспоненциально расходящемуся, т.е. система приобретает асимптотическую неустойчивость. Изменение вида характерного переходного процесса при таком пересечении коэффициентами характеристического уравнения оси c_1 показано на рисунке 7.

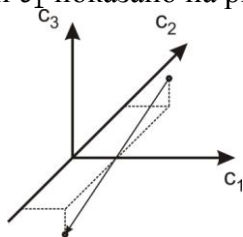


Рисунок 6. Схема перехода коэффициентов характеристического уравнения через ось c_1 из области устойчивости

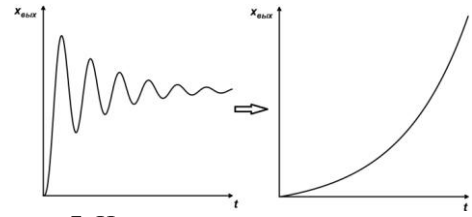


Рисунок 7. Изменение вида характерного переходного процесса при пересечении оси c_1 из зоны устойчивости

Проведем анализ четвертого случая, когда при своем движении коэффициенты характеристического уравнения пересекают ось c_2 . При этом сначала исследуем поведение системы при движении коэффициентов ее характеристического уравнения в плоскости $c_1 - c_2$, т.е. когда $c_3 = 0$ (см. рисунок 8). Если $c_1 > 2\sqrt{c_2}$ (полагается, что $c_2 > 0$; в противном случае система неустойчива – см. (7)), то система находится на границе устойчивости, колебательность в ней не проявляется (см. рисунок 9). Характеристическое уравнение имеет три вещественных корня, один из которых равен нулю, два других – отрицательны. При пересечении коэффициентами кривой $c_1 = 2\sqrt{c_2}$ (т.е. при их попадании в область Ω) в графике переходной характеристики возникают затухающие колебания, при этом система остается на границе устойчивости. Таким образом, в области Ω (см. рисунок 8) система имеет один корень, равный нулю, и два комплексно-сопряженных корня с отрицательной вещественной частью. Дальнейшее движение коэффициента c_1 к нулю сопровождается снижением скорости затухания колебаний, т.е. уменьшением модуля отрицательной вещественной части комплексно-сопряженных корней. Пересечение коэффициентом c_1 оси c_2 , т.е. когда $c_1 = 0$, упоминавшиеся выше комплексно-сопряженные корни становятся чисто мнимыми. Дальнейшее уменьшение коэффициента c_1 в отрицательную область сопровождается тем, что вещественная часть комплексно-сопряженных корней становится положительной. При этом

система приобретает колебательную неустойчивость (см. рисунок 9). Пересечение коэффициентом c_1 при его движении в отрицательную область кривой $c_1 = -2\sqrt{c_2}$ сопровождается тем, что система становится асимптотически неустойчивой (см. рисунок 9). При этом один характеристический корень остается равным нулю, два других становятся вещественными положительными.

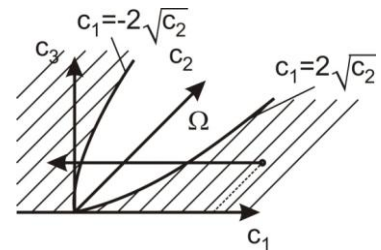


Рисунок 8. Схема перехода коэффициентов характеристического уравнения через ось c_2

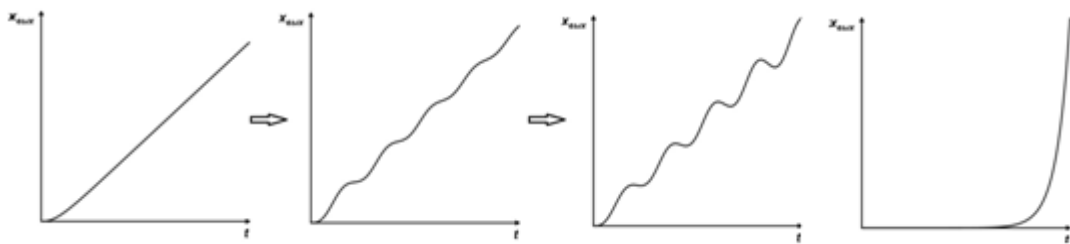


Рисунок 9. Изменение вида характерного переходного процесса при пересечении оси c_2 для случая движения коэффициентов характеристического уравнения в плоскости $c_3 = 0$

Переход коэффициентов характеристического уравнения через ось c_2 из области устойчивости, т.е. из области $c_3 > 0$ (но $c_3 < c_1 c_2$), $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, в область $c_3 < 0$, $c_1 < 0$ (см. рисунок 10) сопровождается тем, что и вещественный

корень, и вещественная часть комплексно-сопряженных корней меняют свои знаки с «-» на «+». Система приобретает и колебательную, и асимптотическую неустойчивость (см. рисунок 11).

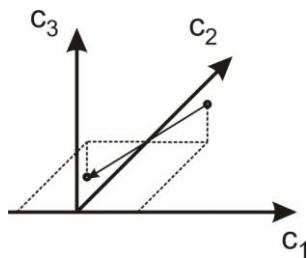


Рисунок 10. Схема перехода коэффициентов характеристического уравнения через ось c_2 из области устойчивости

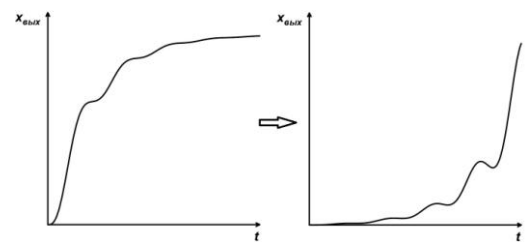


Рисунок 11. Изменение вида характерного переходного процесса при пересечении оси c_2 из зоны устойчивости

Обобщение результатов анализа всех вышеприведенных случаев представлено в таблице.

Выражения (7) позволяют достаточно просто провести анализ устойчивости САУ

третьего порядка, а рисунок 1 наглядно иллюстрирует область, в которой при этом должны находиться коэффициенты характеристического уравнения.

Таблица 1. Варианты потери устойчивости САУ третьего порядка при изменении коэффициентов характеристического уравнения

№ варианта	Характер пересечения коэффициентами поверхности, ограничивающей область устойчивости	Изменение положения корней характеристического уравнения в плоскости корней	Изменение вида переходного процесса	Вид приобретаемой неустойчивости
1				Колебательная
2				Асимптотическая
3а				Асимптотическая
3б				Асимптотическая
4а				Колебательная, затем асимптотическая
4б				Асимптотическая

Список использованных источников

[1] Гимадиев А.Г. Автоматика и регулирование авиационных двигателей и энергетических установок. Часть 1. Теория автоматического управления. Линейные системы [Текст] / А.Г. Гимадиев, А.Н. Крючков, А.Б. Прокофьев, Е.В. Шахматов, В.П. Шорин. - Самара: СГАУ, 2002. 139 с.

[2] Дядик В.Ф. Теория автоматического управления [Текст] / В.Ф. Дядик, С.А. Байдали, Н.С. Криницын. – Томск: Изд-во ТПУ, 2011. 196 с.

[3] Васильев, К.К. Теория автоматического управления (следящие системы) [Текст] / К.К. Васильев. - Ульяновск, 2001. 98 с.

[4] Козлов Д.В. Оптимальное по быстродействию позиционирование двигателя постоянного тока (система третьего порядка) [Текст] /

Д.В. Козлов // Известия ТулГУ. Технические науки. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2011, Вып. 5, Ч. 1. С. 134 – 142.

[5] Добробаба Ю.П. Обоснование эталонных передаточных функций систем третьего порядка [Текст] / Ю.П. Добробаба, А.Г. Мурлин, А.Ю. Чумак, И.А. Воеводов, А.А. Степкин // Известия

высших учебных заведений. Пищевая технология. – Краснодар: Изд-во Кубанского государственного технологического университета, 1998, №2-3. С. 75-76.

[6] Yingchun Zhong, Yan Luo. Comparative study of single-loop control of third-order object // Procedia Engineering, vol. 15, 2011, pp. 783 – 787.

Prokofev A.B. STUDY OF THIRD-ORDER SYSTEM STABILITY IN THE SPACE OF CHARACTERISTIC EQUATION COEFFICIENTS

Samara State Aerospace University
(national research university)
443086, Russia, Samara,
Moskovskoye shosse, 34
proka@mail.ru

Safonov S.V.

Voronezh State Technical University
394026, Russia, Voronezh,
Moskovskiy prospect, 14
safonov@vorstu.ru

The problem of building the stability space for third-order control system is solved. The 3D stability space has coefficients of characteristic equation as coordinates. Analytical conditions of system stability are defined. Different variants of crossing of stability border surface by coefficients of characteristic equation are considered. The analysis of changes in location of roots of system characteristic equation and in types of step responses under these variants is fulfilled.

Keywords: control system; stability; characteristic equation; step response

References

- [1] Gimadiev, A.G., Kruchkov, A.N., Prokofev, A.B., Shakhmatov, E.V. and Shorin, V.P. (2002), Avtomatika i regulirovanie aviacionnikh dvigatelei i energeticheskikh ustanovok. Chast 1. Teoriya avtomaticheskogo regulirovaniya [Automatic and control of aviation engines and power plants. Part 1. Theory of automatic control], SSAU, Samara, 139 p. (in Russian).
- [2] Dyadic, V.F., Baydaly, S.A. and Krinichin, N.S. (2011), Teoriya avtomaticheskogo regulirovaniya [Theory of automatic control], TPU, Tomsk, 196 p. (in Russian).
- [3] Vasilev, K.K. (2001), Teoriya avtomaticheskogo regulirovaniya (sledyaschie sistemi) [Theory of automatic control (servo systems)], Ulanovsk, 98 p. (in Russian).
- [4] Kozlov, D.V. (2011), Optimalnoe po bistrodeystviyu posicionirovanie dvigatelya postoyannogo toka (Sistema tretego poryadka) [Optimum speed positioning of direct current electric engine (third-order system)] // Izvestiya TulGU. Technicheskiye nauki [Gerald of TulSU. Technical sciences], TulSU publ., Tula, Issue 5, Part 1, pp. 134 – 142. (in Russian).
- [5] Dobrobaba, U.P., Murlin, A.U., Chumak, I.A., Voevodov, A.A. and Stepkin, A.A. (1998), Obosnovanie etalonnikh peredatochnikh funkciy system tretego poryadka [Reasoning of reference transfer functions of third-order systems] // Izvestiya vishikh uchebnikh zavedenij. Pischevaya tehnologiya [High schools' Gerald. Food technology], Kuban State Technology University publ., Krasnodar, no. 2-3, pp. 75-76. (in Russian).
- [6] Yingchun Zhong and Yan Luo (2011), Comparative study of single-loop control of third-order object, Procedia Engineering, Vol. 15, pp. 783 – 787.