

## ИССЛЕДОВАНИЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ РОТОРА ТУРБОВИНТОВОГО ДВИГАТЕЛЯ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ РЕДУКТОРОМ

М.И. Курушин,  
В.Б. Балякин,  
В.Б. Оссиала

Самарский национальный  
исследовательский университет имени  
академика С.П. Королева  
Московское шоссе, 34,  
г. ,  
443086  
029-029@mail.ru

*В работе рассматривается динамика турбовинтового двигателя с дифференциальным редуктором. Исследуются только собственные крутильные колебания. Показано, что в изделиях с зубчатыми колёсами одно-двух парным зацеплениями возникает вибрация, резонансы и параметрическая неустойчивость упругих элементов всего изделия. В рамках решения проблемы динамики упругой систем, по опытным данным и при исследованиях нами методом конечных элементов для одной пары сопряженных зубьев можно принять, что зависимость близка к квадратичной параболе или к синусоиде.*

*Рассматриваются гидродинамическое демпфирование, вибраций упругой системы ротора и как возникает смазочная прослойка в зацеплениях зубчатых колес и в шлицевых соединениях. Также исследовали Собственные частоты ( $\omega$ ) всего ротора вместе с лопатками и без лопаток при постоянном коэффициенте перекрытия в зубьях шестерен. Показано, что пересопряжение зубьев в зацеплении колёс редуктора приводит к параметрическим колебаниям лопаток двигателя.*

**Ключевые слова:** Динамика; дифференциальный редуктор; крутильные колебания; жесткость; коэффициент перекрытия; гидродинамическое демпфирование; упругая модель

### 1 Введение

В работах [1] и [2] по параметрической динамике в упругих системах с одно- двух парным зацеплениями, опираясь на многочисленные опыты с дифференциальными редукторами турбовинтового двигателя, было показано, что в изделиях с зубчатыми колесами одно-двух парным зацеплениями возникает вибрация, резонансы и параметрическая неустойчивость упругих элементов всего изделия [3]. Как способ уменьшения вибрации изделий предлагается введение разношаговости в области двух парного зацепления зубчатых колес, величина которой зависит от передаваемой редуктором мощности [4]. Исследование динамики роторов авиационных двигателей может рассматриваться в нелинейной [5,6] или линейной постановке [7].

### 2 Постановка задачи

На рисунке 1 показана упрощенная упругая модель ротора турбовинтового двигателя с параметрическим возбуждением от шестерен дифференциального редуктора для исследования крутильных колебаний ротора изделия. Упрощения по сравнению с реально существовавшим двигателем сделаны для облегчения проведения расчетов и за неимением точных расчетных данных по конструкции отдельных элементов изделия.

Большинство размеров и параметров конструкции принималось по эскизам технического описания самого изделия НК-12МВ. Точно принималось только: межосевое расстояние редуктора, числа зубьев шестерен модуль их и исходные параметры инструментов для нарезания, как зубьев шестерен, так и шлицевых соединений валов. Допущения в этой модели были сделаны следующие. Модель дискретная из 34 упруго связанных между собой элементов (масс), которые моделируют элементы центрального

солнечного колеса, контактирующего с тремя сателлитами и сопряженного упруго через шлицевое соединение с приводным

валом, который разбит на пять упруго связанных между собой участков (масс).

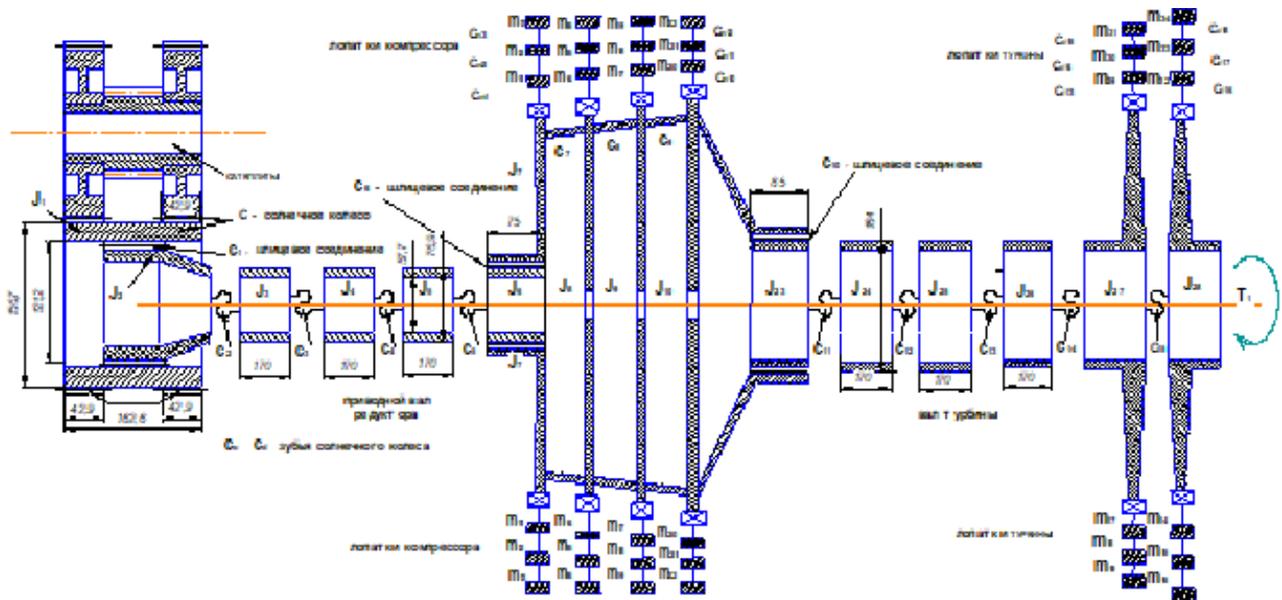


Рисунок 1. Динамическая модель ротора двигателя с дифференциальным редуктором

Приводной вал также шлицевым соединением связан с первым диском ротора компрессора. Ротор компрессора четырех ступенчатый (в реальном двигателе в три с половиной раза ступеней больше), ротор компрессора связан шлицевым соединением с валом турбины, который также разбит на несколько участков (масс) и упруго переходит в двухступенчатый ротор турбины (в реальном изделии в два с половиной раза ступеней больше). Лопатки компрессора и турбины имитируются как пластины переменного сечения и высоты в плоскости вращения. Все лопатки дискретизируются - все трех массовые, упруго связаны между собой и с дисками изгибными жесткостями, и которые могут перемещаться только в окружном направлении к оси ротора. Принято, что в процессе вибраций все лопатки на своих дисках колеблются синхронно в пакете. Все сателлиты одинаковы и точно изготовлены, без погрешностей, также как и солнечное колесо, хотя мы в расчетных программах заложили такую возможность. Также принимается, что в относительном

движении тела сателлитов вращаются равномерно, а упругие деформации в процессе колебаний происходит только в зубьях солнечного колеса и сателлитов и в упругих элементах всего ротора. Зубья сателлитов входят и выходят из контакта точно и синхронно одновременно и все шлицевые соединения включены в упругую систему модели жесткостью зубцов их в окружном направлении с наличием зазоров в зацеплениях, как и в зубьях шестерен редуктора. Сделано с целью определения характера динамических усилий передающихся между соединяемыми элементами упругой системы, а также учета возможности возникновения разрывов в контактах зубцов шлиц и возникновения нелинейности вибрации в системе. При доводке изделия, в шлицевом соединении солнечного колеса с приводным валом, которые принудительно смазывались, возникал сильный наклеп, который устранялся различными методами (технологическими и конструктивными) [8]. Поэтому необходимо знать в динамике, каковы эти усилия и каков характер их

изменения. Рассматриваются только крутильные колебания в элементах принятой упругой системы где зацепление зубьев с периодическим изменением жесткостей в зацеплениях зубьев при их пересопряжении. В расчетах динамики упругой системы погрешности изготовления зубчатых колес не учитывались но учитывалось влияние зазоров в зацеплениях зубьев сопряженных колес и зубцов шлиц и в первую очередь наличие фланков и разношаговости профилей зубьев шестерен. Движение дискретных масс лопаток описывалось в переносной полярной системе координат, зубья шестерен рассматривались как упругие без инерционной пластины переменной жесткости (параболического или синусоидального характера) по высоте. Тела зубчатых колес принимались как абсолютно жесткие инерционные массы. Таким образом, возможного перемещения оснований зубьев шестерен за счет податливостей прилежащих зубьям участков тел шестерен и, следовательно, изменения основных шагов между ними не учитывалось. При численных решениях дифференциальных уравнений параметрической динамики упругой системы нужно, прежде всего, иметь аналитические зависимости изменения жесткостей зубьев в процессе зацепления. По опытным данным и при исследованиях нами методом конечных элементов для одной пары сопряженных зубьев можно принять, что эта зависимость близка к квадратичной параболе или к синусоиде – максимальное значение жесткости пары контактирующих зубьев в районе полюса зацепления –  $CO$ , а минимальная - в начале зацепления-  $CK$ . Аналитическая зависимость параболического типа для жесткости пары зубьев, которая входит в зацепление в зависимости от положения места контакта зубьев по линии зацепления:

$$C_1 = C_K + 4 \cdot (C_O - C_K) \cdot \left\{ \frac{x}{\varepsilon \cdot p} \right\} \cdot \left[ 1 - \left\{ \frac{x}{\varepsilon \cdot p} \right\} \right]$$

.Здесь  $\varepsilon$  - коэффициент перекрытия;  $p$  - основной шаг зацепления;  $x$  - координата, определяемая по зависимости  $x = \omega \cdot r_o$ , где

$\omega$  - угловая скорость ведущего колеса (в том числе и с учетом вибрации);  $r_o$  - радиус основной окружности ведущего колеса.

Эта зависимость справедлива для случая, когда жесткости сопряженных зубьев одинаковые на входе и на выходе их зацепления, для всей области зацепления одной пары зубьев. При входе зубьев шестерни в зону двух парного зацепления сохраняется еще жесткость предыдущей пары зубьев, которая определяется по такой же зависимости, но только смещенной на один основной шаг  $p$  по линии зацепления

$$C_2 = C_K + 4 \cdot (C_O - C_K) \cdot \left\{ \frac{(p+x)}{\varepsilon \cdot p} \right\} \cdot \left[ 1 - \left\{ \frac{(p+x)}{\varepsilon \cdot p} \right\} \right]$$

Таким образом, в области двух парного зацепления при  $(\varepsilon - 1) \cdot p$  действует суммарная жесткость двух пар зубьев и  $C = C_1 + C_2$ . При аппроксимации жесткости зубьев зависимостью синусоидального характера для случая одно - двух парного зацепления получим в области одно парного зацепления.

$C_1 = C_K + (C_O - C_K) \cdot \sin(\pi / (\varepsilon \cdot p) \cdot x)$ . В области двух парного зацепления еще добавиться смещенная по ходу зацепления жесткость предыдущей пары зубьев  $C_2 = C_K + (C_O - C_K) \cdot \sin(\pi / (\varepsilon \cdot p) \cdot (p+x))$  и суммарная жесткость будет  $C = C_1 + C_2$ . Графически, эти зависимости для варианта одно двух парного зацепления зубьев показаны на рисунке 2.

Из графиков видны большие по величине и мгновенные по времени перепады жесткостей в зацеплении зубьев шестерен, которые возбуждают параметрические колебания в упругой системе двигателя. Действующие усилия и крутящие моменты в упругой системе в областях много парного зацепления зубьев будут изменяться по таким же закономерностям, как и удельные жесткости зубьев, в зацеплении (пропорциональны жесткостям зубьев в зацеплении) как это выглядит на графиках рисунок 2.

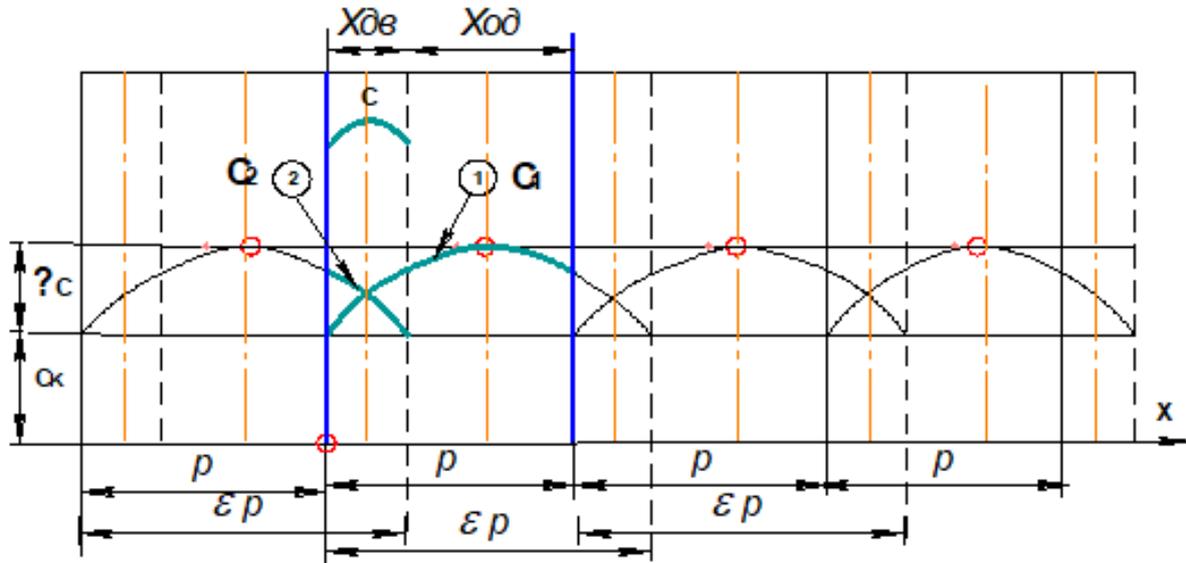


Рисунок 2. Изменения жесткостей зубьев в процессе зацепления для варианта зубчатых колес с одно – двух парного зацепления

Так, если при входе зубчатой пары в зацепление в ней мгновенно (скачкообразно) возникнет усилие пропорциональное начальной удельной жесткости –  $C_k$ , то в предыдущей паре зубьев, которая до этого находилась в зацеплении, усилие в зацеплении было пропорциональным удельной жесткости при  $x = (\varepsilon - 1) \cdot p$ .

Видно, что перепад удельных жесткостей, а следовательно и усилий, при много парном зацеплении зависит от коэффициента перекрытия  $\varepsilon$ . Чем больше перекрытие, тем больше перепад удельных жесткостей и усилий в зоне много парного зацепления. И таким образом, возникает скачкообразное увеличение суммарной жесткости в зацеплении зубьев шестерен. При выходе же этой пары зубьев из зацепления суммарные усилия в зацеплении мгновенно (скачкообразно) уменьшается и становится пропорциональным удельной жесткости -  $C_d$ . Скачкообразное изменение суммарной жесткости в зацеплениях зубьев через каждый основной шаг  $p$  приводит к параметрическим колебаниям, резонансам и неустойчивости упругих систем [9].

Основные параметры зацепления солнечного колеса с тремя сателлитами приняты следующими (приняты как в

реально существовавшем изделии НК-12МВ). Число зубьев солнечного колеса  $z_c = 36$ ; модуль зацепления -  $m_c = 4,6$  мм; суммарная рабочая длина зубьев шестерен  $b_c = 85,8$  мм; зазоры в зацеплениях зубьев шестерен и шлицевых соединений  $\delta = 0,3$  мм. Радиус делительной окружности солнечного колеса

$$r_{01} = m \cdot z_c \cdot \cos(\alpha_0) = 4,6 \cdot 36 \cdot \cos(20^\circ) = 77,807 \text{ мм}$$

Параметры шлицевого соединения солнечного колеса, с приводным валом следующие: число шлиц  $z_{шс} = 44$ ; модуль зацепления шлиц  $m_{шс} = 2,5$  мм; длина шлиц  $b_{шс} = 40$  мм. Радиус основной окружности шлицевого соединения:

$$r_{ошс} = m_{шс} \cdot z_{шс} \cdot \cos(\alpha_{ошс}) / 2 = 2,5 \cdot 44 \cdot \cos(30^\circ) / 2 = 38,45 \text{ мм}$$

где -  $\alpha_{ошс} = 30^\circ$  угол исходного контура инструмента при нарезании эвольвентных шлиц. Удельная окружная жесткость одной пары зубцов шлиц на основании литературных данных и нашими исследованиями принимается равной  $c_{шс} = 16000 \text{ Н/мм}^2$ . Тогда жесткость на

кручение всего шлицевого соединения солнечного колеса с приводным валом будет:

$$C_1 = c_{ш} \cdot b_{шк} \cdot z_{шк} \cdot r_{ошк} \cdot r_{ошк} = 28,16 \cdot 10^6 \text{ Н / мм}$$

Параметры шлицевого соединения приводного вала с ротором компрессора следующие: число шлиц  $z_{шк} = 36$ ; модуль зацепления шлиц  $m_{ш} = 2,5$  мм; длина шлиц  $b_{шк} = 70$  мм.

Радиус основной окружности шлицевого соединения:

$$r_{ошк} = m_{ш} \cdot z_{шк} \cdot \cos(\alpha_{ош}) / 2 \\ = 2,5 \cdot 36 \cdot \cos(30^\circ) / 2 = 38,97 \text{ мм}$$

Тогда жесткость на кручение всего шлицевого соединения приводного вала с ротором компрессора будет:

$$C_6 = c_{ш} \cdot b_{шк} \cdot z_{шк} \cdot r_{ошк} \cdot r_{ошк} = 61,23 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Параметры шлицевого соединения ротора компрессора с валом турбины следующие: число шлиц –  $z_{шм} = 85$ ; модуль зацепления шлиц –  $m_{ш} = 2,5$  мм. длина шлиц –  $b_{шм} = 85$  мм. Радиус основной окружности шлицевого соединения :

$$r_{ошм} = (m_{ш} \cdot z_{шм} / 2) \cdot \cos(\alpha_{ош}) \\ = (2,5 \cdot 85 / 2) \cdot \cos(30^\circ) = 92,02 \text{ мм}$$

Тогда жесткость на кручение всего шлицевого соединения ротора компрессора с валом турбины будет:

$$C_{10} = c_{ш} \cdot b_{шм} \cdot z_{шм} \cdot r_{ошм} \cdot r_{ошм} = 978,9 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Необходимо отметить, что в рассматриваемой нами упрощенной модели упругой системы по сравнению с реальной, статический крутящий момент принят близким к максимальному режиму работы двигателя в период его доводки. Это, естественно, привело к очень большим значениям, как усилий, так и напряжений в элементах расчетной упругой системы. Максимальное значение нормального усилия в зацеплениях зубьев шестерен всех трех сателлитов от действующего крутящего момента  $F = 60$  кН. Но объем проведенных расчетных работ был настолько большим и продолжительным что мы были вынуждены

сохранить такой режим работы нашей модели. Учитывая, что напряжения в элементах упругой системы пропорциональны действующей нагрузке надо было усилия в зацеплениях зубьев шестерен нашей модели уменьшить не менее чем в три раза. Значения остальных параметров упругой системы приведены в таблице 1.

### 3 Контактное гидродинамическое демпфирование вибрации в зубьях солнечного колеса и шлицевого соединения его с приводным валом

Результаты проведенных исследований показали, что если не учитывать контактно гидродинамического демпфирования в зубчатых колесах и шлицевом соединении редуктора, то при параметрических резонансах с учетом только принятых в расчетной практике газотурбинных двигателей значений коэффициентов демпфирования  $-\lambda$ , численного аналитического решения динамики упругой системы может не получиться - систему “разносит” [10]. Мы считаем, что в правильно смазываемых зубчатых и шлицевых соединениях в условиях вибраций при взаимном поступательном перемещении контактирующих поверхностей происходит контактно гидродинамическое демпфирование вибраций упругой системы ротора. Общим для зубчатых колес и шлицевых соединений является то, что в рабочих условиях (чаще всего при вибрациях) между контактирующими элементами деталей возникает смазочная прослойка, они не только перекатываются и скользят друг относительно друга, но имеют и изменяющуюся во времени скорость относительного перемещения по нормали к поверхностям контакта.

Для того чтобы лучше понять и описать процесс сопротивления вибрациям и возможности возникновения кавитации (наклепа) в смазываемых контактах при относительном поступательном перемещении элементов деталей нами были

приняты упрощенные контактно - | гидродинамические модели на рисунке 3.

Таблица 1- Значения параметров упругой системы

Массовые полярные моменты инерции элементов ротора (кг·см <sup>2</sup> )·10 <sup>3</sup>		Массы элементов лопаток (кг)·10 <sup>3</sup>		Радиусы центров масс элементов лопаток (мм)		Крутильные жесткости элементов ротора (Нм/рад)·10 <sup>6</sup>		Изгибные жесткости элементов лопаток (Н/рад)·10 <sup>6</sup>	
J <sub>1</sub>	49.1	m <sub>11</sub>	0.1946	R <sub>л1</sub>	228.2	C	35.0	C <sub>л1</sub>	0.22337
J <sub>2</sub>	7.5795	m <sub>12</sub>	0.1752	R <sub>л2</sub>	289.4	C <sub>1</sub>	28.2	C <sub>л2</sub>	0.11308
J <sub>3</sub>	3.0318	m <sub>13</sub>	0.1752	R <sub>л3</sub>	350.6	C <sub>2</sub>	304.1	C <sub>л3</sub>	0.02827
J <sub>4</sub>	3.0318	m <sub>14</sub>	0.1749	R <sub>л4</sub>	222.5	C <sub>3</sub>	304.1	C <sub>л4</sub>	0.30774
J <sub>5</sub>	3.0318	m <sub>15</sub>	0.1574	R <sub>л5</sub>	277.5	C <sub>4</sub>	304.1	C <sub>л5</sub>	0.15579
J <sub>6</sub>	3.0318	m <sub>16</sub>	0.1574	R <sub>л6</sub>	332.5	C <sub>5</sub>	304.1	C <sub>л6</sub>	0.03895
J <sub>7</sub>	61.2	m <sub>17</sub>	0.1495	R <sub>л7</sub>	215.0	C <sub>6</sub>	61,23	C <sub>л7</sub>	0.49315
J <sub>8</sub>	34.7	m <sub>18</sub>	0.1345	R <sub>л8</sub>	262.0	C <sub>7</sub>	377.7	C <sub>л8</sub>	0.24966
J <sub>9</sub>	43.7	m <sub>19</sub>	0.1345	R <sub>л9</sub>	309.0	C <sub>8</sub>	377.7	C <sub>л9</sub>	0.06241
J <sub>10</sub>	49.7	m <sub>20</sub>	0.1368	R <sub>л10</sub>	211.0	C <sub>9</sub>	377.7	C <sub>л10</sub>	0.64397
J <sub>23</sub>	1773.6	m <sub>21</sub>	0.1231	R <sub>л11</sub>	254.0	C <sub>10</sub>	978.9	C <sub>л11</sub>	0.32601
J <sub>24</sub>	709.4	m <sub>22</sub>	0.1231	R <sub>л12</sub>	297.0	C <sub>11</sub>	7115.0	C <sub>л12</sub>	0.08150
J <sub>25</sub>	709.4	m <sub>29</sub>	0.1752	R <sub>л13</sub>	328.4	C <sub>12</sub>	7115.0	C <sub>л13</sub>	4.43144
J <sub>26</sub>	709.4	m <sub>30</sub>	0.1752	R <sub>л14</sub>	389.6	C <sub>13</sub>	7115.0	C <sub>л14</sub>	2.24341
J <sub>27</sub>	8809.1	m <sub>31</sub>	0.1749	R <sub>л15</sub>	450.8	C <sub>14</sub>	7125.0	C <sub>л15</sub>	0.50854
J <sub>28</sub>	4991.3	m <sub>32</sub>	0.1574	R <sub>л16</sub>	323.0	C <sub>15</sub>	5439.0	C <sub>л16</sub>	3.21646
		m <sub>33</sub>	0.1495	R <sub>л17</sub>	378.0			C <sub>л17</sub>	1.52833
		m <sub>34</sub>	0.1345	R <sub>л18</sub>	433.0			C <sub>л18</sub>	0.40708

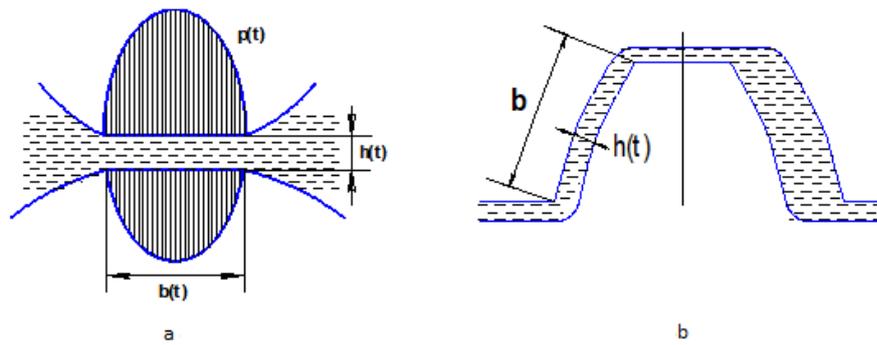


Рисунок 3. Контактная гидродинамика: а - в зубьях шестерен; б - в зубьях шлиц

Допущения, принятые в модели упругой системы: 1. контакт элементов деталей - зубцов шлиц и зубьев зубчатых колес, имитируется контактом двух поступательно перемещающихся относительно друг друга контактно податливых масс; 2. массы разделены масляной прослойкой; 3. взаимное перемещение масс происходит в условиях вибраций; 4. движение смазки в контакте принимается ламинарным, изотермическим и плоским с возможностью входа и выхода из контакта вдоль короткой стороны площадки контакта; 5. смазочный слой и контактные слои деталей в нормальном к ним направлении принимаются без инерционными, т.е. усилия в этом направлении передаются мгновенно; 7. смазка обладает Ньютонскими свойствами. В результате решения дифференциального уравнения Рейнольдса для такого случая:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 12 \cdot V(t),$$

при сделанных допущениях определяется гидродинамическое сопротивление взаимному перемещению масс:

$$F_z = -\mu \cdot L \cdot V(t) \cdot \left[ \frac{b}{h - y(t)} \right]^3$$

где  $p$  - давление в смазочном слое - рис.6;  $\mu$  - вязкость смазки;  $b$  - ширина площадки контакта;  $L$  - длина площадки контакта;  $V(t)$  - скорости взаимного сближения - расхождения деталей;  $h$  - среднее расстояние между контактирующими деталями;  $y(t)$  - текущее расстояние

между контактирующими поверхностями деталей.

Таким образом, в упругой системе возникают контактно гидродинамические усилия, пропорциональные скоростям взаимного перемещения контактирующих элементов и нелинейно зависящие от величины взаимного перемещения их по нормали друг к другу. В зацеплениях зубчатых колес смазочная прослойка в контактах возникает за счет смешиваемости материала их и перекатывания (качения) контактирующих профилей зубьев (вязкая смазка не успевает “убежать” из под контакта). Толщина смазочного слоя в контакте зубчатых колес  $h_o$  в условиях качения определяется по формуле [7]

$$h_o = \frac{3,17 \cdot [\mu_o \cdot (U_a + U_b)]^{0,75} \cdot n^{0,6}}{K_0^{0,15} \cdot (\lambda_a + \lambda_b)^{0,4}}$$

где  $\mu_o$  (Нс/м<sup>2</sup>) - вязкость смазки при атмосферном давлении;  $(U_a + U_b)$  (м/с) - суммарная скорость качения в контактах зубьев в полюсе зацепления;  $n$  (м<sup>2</sup>/Н) - пьезокоэффициент вязкости смазки при заданной температуре;  $K_0$  - (Н/м) - погонная нагрузка в полюсе зацепления зубьев;  $(\lambda_a + \lambda_b)$  (1/м) - приведенная кривизна в контакте зубьев в полюсе зацепления:

$$(\lambda_a + \lambda_b) = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b},$$

где  $\rho_a$  (м)- радиус кривизны профиля зуба солнечного колеса в полюсе зацепления;

$U_a = r_{oa} \cdot \omega_a$  (м/с) - скорость качения профиля зуба солнечного колеса в полюсе зацепления;  $U_b = r_{ob} \cdot \omega_b$  (м/с) - скорость качения профиля зуба сателлита в полюсе зацепления. Ширина площадки контакта в зубьях стальных зубчатых колес :

$$b = 3.04 \cdot \sqrt{\frac{\rho_a \cdot \rho_b}{E \cdot L \cdot (\rho_a + \rho_b)}} \cdot F_C,$$

Здесь  $E=2 \cdot 10^5$  МПа –модуль упругости стали;  $L=85,8$  мм – контактная длина зубьев шестерен;  $F_C$  (Н) – усилие в зацеплении солнечного колеса с одним сателлитом.

В шлицевом соединении солнечного колеса с приводным валом, которые принудительно смазываются во избежание износа шлиц, как показывают специальные исследования происходит даже самонагнетание смазки в контакт из-за смачиваемости поверхности зубцов шлиц. Гидродинамическое сопротивление взаимному перемещению масс элементов упругой системы сопряженных с шлицевым соединением определяется по такой же зависимости что и для зубьев шестерен –  $F_{zш}$ , но параметрами будут: длина шлиц –  $b_{ш}$ ; за ширину площадки контакта принимается контактная высота зубцов шлиц –  $h_{ш} = 2,5$  мм; число шлиц –  $z_{ш} = 36$ . Как для зубьев шестерен, так и для зубцов шлиц за минимальное значение толщин смазочных слоев принималась высота шероховатости контактирующих поверхностей –  $h = 0.003$  мм. Расчетные параметры для смазки (25% - МС-20 + 75% - трансформаторное) при рабочей температуре  $t = 50^{\circ}$ :  $\mu_0 = 0.00146$  (кг·с/м<sup>2</sup>);  $n \cdot 10^{-6} = 0.176$  (м<sup>2</sup>/кг).

#### 4 Математическая модель ротора турбовинтового двигателя как много массовой упругой системы с зубчатыми колесами и шлицевыми соединениями

Усилие в зацеплениях зубьев шестерен (суммарно в трех зацеплениях) -  $F_Z = (\varphi_1 \cdot r_{o1} - \Delta\varphi) \cdot C$ , где  $\Delta\varphi$  - разношаговость (фланки) в зоне двух парного зацепления зубьев солнечного колеса. Крутящий момент в зацеплении зубьев шестерен -  $T_Z = F_Z \cdot r_{o1}$ . Крутящий момент в шлицевом соединении солнечного колеса с приводным валом -  $T_{usc} = (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot C_1 \cdot r_{ouc}$ . Усилие на один зубец шлицевого соединения солнечного колеса с приводным валом -  $F_{usc} = T_{usc} / z_{usc}$ .

Крутящий момент в шлицевом соединении приводного вала с ротором компрессора  $T_{шк} = (\varphi_7 - \varphi_6) \cdot C_6 \cdot r_{ошк}$ . Усилие на один зубец шлицевого соединения приводного вала с ротором компрессора -  $F_{шк} = T_{шк} / z_{шк}$ . Крутящий момент в шлицевом соединении ротора компрессора с валом турбины -  $T_{ум} = (\varphi_{23} - \varphi_{10}) \cdot C_{10} \cdot r_{оум}$ . Усилие на один зубец шлицевого соединения ротора компрессора с валом турбины -  $F_{ум} = T_{ум} / z_{ум}$ .  $F_{z1}, F_{z2}$  - контактно гидродинамические усилия в областях однопарного и двух парного зацеплений зубьев шестерен.  $F_{zш}$  - контактно гидродинамическое усилие в шлицевом соединении солнечного колеса с приводным валом.  $J_1, \dots, J_{34}$  - массовые полярные моменты инерции по кручению элементов упругой системы, которые рассчитываются по геометрическим размерам указанных на рис.6 и таблице 1. Для дискретных элементов лопаток моменты инерции при вибрациях их в окружном направлении определяются по зависимостям -  $J_i = m_i \cdot R_i \cdot R_i$  - где  $m_i$  - масса элемента, а  $R_i$  - радиус до оси вращения ротора элемента лопатки.  $\varphi_1, \dots, \varphi_{34}$  - углы поворота элементов упругой системы в процессе крутильных колебаний.

Влияние сил инерции при изгибе лопаток не учитывалось.

Поэтому у каждого элемента лопатки только одна степень свободы. Это – перемещение его только по дуге окружности, и поэтому каждая трех массовая лопатка имеет только по три собственных частоты.  $C_2, C_6$  - жесткости на кручение элементов приводного вала.  $C_7, C_{10}$  - жесткости на кручение элементов ротора компрессора.  $C_{11}, C_{14}$  - жесткости на кручение элементов вала турбины.  $C_{15}$  - жесткость на кручение ротора турбины.  $C_{11} \dots C_{12}$  - жесткости на изгиб элементов лопаток компрессора.  $C_{13} \dots C_{18}$  - жесткости на изгиб элементов лопаток турбины.

Коэффициенты вязкого демпфирования в элементах ротора с воздушной средой согласно с принятыми значениями в практике расчетов газотурбинных двигателей приняты -  $\lambda = 0.03 \text{ Н} \cdot \text{с}$ . Коэффициенты вязкого демпфирования в среде редуктора с разбрызгиванием смазки приняты -  $\lambda_c = 0.3 \text{ Н} \cdot \text{с}$ .

Дифференциальные уравнения крутильных колебаний упругой системы с 34 массами.

Солнечное колесо:

$$J_1 \cdot (d^2\phi_1/dt^2) = T_{уц} - T_Z - (F_{z1} + F_{z2} + \lambda_c) \cdot r_{o1} \cdot (d\phi_1/dt) + F_{zu} \cdot r_{ouc} \cdot (d\phi_2/dt - d\phi_1/dt)$$

Шлицевая муфта солнечного колеса с приводным валом

$$J_2 \cdot (d^2\phi_2/dt^2) = -T_{уц} - C_2 \cdot \phi_2 + C_2 \cdot \phi_3 - F_{zu} \cdot r_{ouc} \cdot (d\phi_2/dt - d\phi_1/dt) - \lambda_c \cdot r_{ouc} \cdot (d\phi_2/dt)$$

Третий участок приводного вала:

$$J_3 \cdot (d^2\phi_3/dt^2) = C_2 \cdot \phi_2 + C_3 \cdot \phi_4 - C_2 \cdot \phi_3 - C_3 \cdot \phi_3 - \lambda_c \cdot r_3 \cdot (d\phi_3/dt)$$

Четвертый участок приводного вала:

$$J_4 \cdot (d^2\phi_4/dt^2) = C_3 \cdot \phi_3 + C_4 \cdot \phi_5 - C_3 \cdot \phi_4 - C_4 \cdot \phi_4 - \lambda_c \cdot r_4 \cdot (d\phi_4/dt)$$

Пятый участок приводного вала:

$$J_5 \cdot (d^2\phi_5/dt^2) = C_4 \cdot \phi_4 + C_5 \cdot \phi_6 - C_4 \cdot \phi_5 - C_5 \cdot \phi_5 - \lambda_c \cdot r_5 \cdot (d\phi_5/dt)_{уц}$$

Шестой участок приводного вала:

$$J_6 \cdot (d^2\phi_6/dt^2) = T_{уц} + C_5 \cdot \phi_5 - C_5 \cdot \phi_6 - \lambda_c \cdot r_{ouc} \cdot (d\phi_6/dt)$$

Первый диск компрессора:

$$J_7 \cdot (d^2\phi_7/dt^2) = -T_{уц} + C_7 \cdot \phi_8 - C_7 \cdot \phi_7 + (\phi_{11} - \phi_7) \cdot C_{11} \cdot R_{11} \cdot R_{11} \cdot z_{k1} - \lambda \cdot R_{k1} \cdot (d\phi_7/dt)$$

Второй диск компрессора:

$$J_8 \cdot (d^2\phi_8/dt^2) = -C_7 \cdot \phi_8 + C_7 \cdot \phi_7 - C_8 \cdot \phi_8 + C_9 \cdot \phi_9 + (\phi_{14} - \phi_8) \cdot C_{14} \cdot R_{12} \cdot R_{12} \cdot z_{k2} - \lambda \cdot R_{k2} \cdot (d\phi_8/dt)$$

Третий диск компрессора:

$$J_9 \cdot (d^2\phi_9/dt^2) = -C_8 \cdot \phi_9 + C_8 \cdot \phi_8 - C_9 \cdot \phi_9 + C_9 \cdot \phi_{10} + (\phi_{17} - \phi_9) \cdot C_{17} \cdot R_{13} \cdot R_{13} \cdot z_{k3} - \lambda \cdot R_{k3} \cdot (d\phi_9/dt)$$

Четвертый диск компрессора:

$$J_{10} \cdot (d^2\phi_{10}/dt^2) = T_{ум} + C_9 \cdot \phi_9 - C_9 \cdot \phi_{10} + (\phi_{20} - \phi_{10}) \cdot C_{10} \cdot R_{14} \cdot R_{14} \cdot z_{k4} - \lambda \cdot R_{k4} \cdot (d\phi_{10}/dt)$$

Первая масса лопатки первой ступени компрессора:

$$J_{11} \cdot (d^2\phi_{11}/dt^2) = (\phi_7 - \phi_{11}) \cdot C_{11} \cdot R_{11} \cdot R_{11} + (\phi_{12} - \phi_{11}) \cdot C_{12} \cdot R_{12} \cdot R_{12} - \lambda \cdot R_{11} \cdot (d\phi_{11}/dt)$$

Вторая масса лопатки первой ступени компрессора:

$$J_{12} \cdot (d^2\phi_{12}/dt^2) = (\phi_{13} - \phi_{12}) \cdot C_{12} \cdot R_{12} \cdot R_{12} - (\phi_{12} - \phi_{11}) \cdot C_{13} \cdot R_{13} \cdot R_{13} - \lambda \cdot R_{12} \cdot (d\phi_{12}/dt)$$

Третья масса лопатки первой ступени компрессора:

$$J_{13} \cdot (d^2 \phi_{13} / dt^2) = -(\phi_{13} - \phi_{12}) \cdot C_{13} \cdot R_{13} \cdot R_{13} - \lambda \cdot R_{13} \cdot (d\phi_{13} / dt)$$

Первая масса лопатки второй ступени компрессора:

$$J_{14} \cdot (d^2 \phi_{14} / dt^2) = (\phi_8 - \phi_{14}) \cdot C_{14} \cdot R_{14} \cdot R_{14} + (\phi_{15} - \phi_{14}) \cdot C_{14} \cdot R_{15} \cdot R_{15} - \lambda \cdot R_{14} \cdot (d\phi_{14} / dt)$$

Вторая масса лопатки второй ступени компрессора:

$$J_{15} \cdot (d^2 \phi_{15} / dt^2) = (\phi_{16} - \phi_{15}) \cdot C_{15} \cdot R_{15} \cdot R_{15} - (\phi_{15} - \phi_{14}) \cdot C_{16} \cdot R_{16} \cdot R_{16} - \lambda \cdot R_{15} \cdot (d\phi_{15} / dt)$$

Третья масса лопатки второй ступени компрессора:

$$J_{16} \cdot (d^2 \phi_{16} / dt^2) = -(\phi_{16} - \phi_{15}) \cdot C_{16} \cdot R_{16} \cdot R_{16} - \lambda \cdot R_{16} \cdot (d\phi_{16} / dt)$$

Первая масса лопатки третьей ступени компрессора:

$$J_{17} \cdot (d^2 \phi_{17} / dt^2) = (\phi_9 - \phi_{17}) \cdot C_{17} \cdot R_{17} \cdot R_{17} + (\phi_{18} - \phi_{17}) \cdot C_{18} \cdot R_{18} \cdot R_{18} - \lambda \cdot R_{17} \cdot (d\phi_{17} / dt)$$

Вторая масса лопатки третьей ступени компрессора:

$$J_{18} \cdot (d^2 \phi_{18} / dt^2) = (\phi_{19} - \phi_{18}) \cdot C_{18} \cdot R_{18} \cdot R_{18} - (\phi_{18} - \phi_{17}) \cdot C_{19} \cdot R_{19} \cdot R_{19} - \lambda \cdot R_{18} \cdot (d\phi_{18} / dt)$$

Третья масса лопатки третьей ступени компрессора:

$$J_{19} \cdot (d^2 \phi_{19} / dt^2) = -(\phi_{19} - \phi_{18}) \cdot C_{19} \cdot R_{19} \cdot R_{19} - \lambda \cdot R_{19} \cdot (d\phi_{19} / dt)$$

Первая масса лопатки четвертой ступени компрессора:

$$J_{20} \cdot (d^2 \phi_{20} / dt^2) = (\phi_{10} - \phi_{20}) \cdot C_{10} \cdot R_{10} \cdot R_{10} + (\phi_{21} - \phi_{20}) \cdot C_{11} \cdot R_{11} \cdot R_{11} - \lambda \cdot R_{10} \cdot (d\phi_{20} / dt)$$

Вторая масса лопатки четвертой ступени компрессора:

$$J_{21} \cdot (d^2 \phi_{21} / dt^2) = (\phi_{20} - \phi_{21}) \cdot C_{11} \cdot R_{11} \cdot R_{11} - (\phi_{22} - \phi_{21}) \cdot C_{12} \cdot R_{12} \cdot R_{12} - \lambda \cdot R_{11} \cdot (d\phi_{21} / dt)$$

Третья масса лопатки четвертой ступени компрессора:

$$J_{22} \cdot (d^2 \phi_{22} / dt^2) = -(\phi_{22} - \phi_{21}) \cdot C_{12} \cdot R_{12} \cdot R_{12} - \lambda \cdot R_{12} \cdot (d\phi_{22} / dt)$$

Первая масса вала турбины:

$$J_{23} \cdot (d^2 \phi_{23} / dt^2) = -T_{ум} + (\phi_{24} - \phi_{23}) \cdot C_{11} \cdot r_{11} - \lambda \cdot r_{11} \cdot (d\phi_{23} / dt)$$

Вторая масса вала турбины:

$$J_{24} \cdot (d^2 \phi_{24} / dt^2) = -(\phi_{24} - \phi_{23}) \cdot C_{11} \cdot r_{11} + (\phi_{25} - \phi_{24}) \cdot C_{12} \cdot r_{12} - \lambda \cdot r_{12} \cdot (d\phi_{24} / dt)$$

Третья масса вала турбины:

$$J_{25} \cdot (d^2 \phi_{25} / dt^2) = (\phi_{26} - \phi_{25}) \cdot C_{13} \cdot r_{13} - (\phi_{25} - \phi_{24}) \cdot C_{12} \cdot r_{12} - \lambda \cdot r_{13} \cdot (d\phi_{25} / dt)$$

Четвертая масса вала турбины:

$$J_{26} \cdot (d^2 \phi_{26} / dt^2) = (\phi_{27} - \phi_{26}) \cdot C_{14} \cdot r_{14} - (\phi_{26} - \phi_{25}) \cdot C_{13} \cdot r_{13} - \lambda \cdot r_{14} \cdot (d\phi_{26} / dt)$$

Первый диск турбины:

$$J_{27} \cdot (d^2 \phi_{27} / dt^2) = -(\phi_{27} - \phi_{26}) \cdot C_{14} \cdot r_{14} + (\phi_{28} - \phi_{27}) \cdot C_{15} \cdot r_{15} + (\phi_{29} - \phi_{27}) \cdot C_{13} \cdot R_{13} \cdot R_{13} \cdot z_{m13} - \lambda \cdot R_{27} \cdot (d\phi_{27} / dt)$$

Второй диск турбины:

$$J_{28} \cdot (d^2 \phi_{28} / dt^2) = -(\phi_{28} - \phi_{27}) \cdot C_{15} \cdot r_{15} + (\phi_{32} - \phi_{28}) \cdot C_{16} \cdot R_{16} \cdot R_{16} \cdot z_{m16} - \lambda \cdot R_{28} \cdot (d\phi_{28} / dt)$$

Первая масса лопатки турбины первой ступени:

$$J_{29} \cdot (d^2 \phi_{29} / dt^2) = (\phi_{30} - \phi_{29}) \cdot C_{\cdot 14} \cdot R_{\cdot 14} \cdot R_{\cdot 14} - (\phi_{29} - \phi_{27}) \cdot C_{\cdot 13} \cdot R_{\cdot 13} \cdot R_{\cdot 13} - \lambda \cdot R_{\cdot 13} \cdot (d\phi_{29} / dt)$$

Вторая масса лопатки турбины первой ступени:

$$J_{30} \cdot (d^2 \phi_{30} / dt^2) = -(\phi_{30} - \phi_{29}) \cdot C_{\cdot 14} \cdot R_{\cdot 14} \cdot R_{\cdot 14} + (\phi_{31} - \phi_{30}) \cdot C_{\cdot 15} \cdot R_{\cdot 15} \cdot R_{\cdot 15} - \lambda \cdot R_{\cdot 14} \cdot (d\phi_{30} / dt)$$

Третья масса лопатки турбины первой ступени:

$$J_{31} \cdot (d^2 \phi_{31} / dt^2) = (\phi_{30} - \phi_{31}) \cdot C_{\cdot 15} \cdot R_{\cdot 15} \cdot R_{\cdot 15} - \lambda \cdot R_{\cdot 15} \cdot (d\phi_{31} / dt)$$

Первая масса лопатки турбины второй ступени:

$$J_{32} \cdot (d^2 \phi_{32} / dt^2) = (\phi_{28} - \phi_{32}) \cdot C_{\cdot 16} \cdot R_{\cdot 16} \cdot R_{\cdot 16} + (\phi_{33} - \phi_{32}) \cdot C_{\cdot 17} \cdot R_{\cdot 17} \cdot R_{\cdot 17} - \lambda \cdot R_{\cdot 16} \cdot (d\phi_{32} / dt)$$

Вторая масса лопатки турбины второй ступени:

$$J_{33} \cdot (d^2 \phi_{33} / dt^2) = (\phi_{34} - \phi_{33}) \cdot C_{\cdot 16} \cdot R_{\cdot 16} \cdot R_{\cdot 16} - (\phi_{33} - \phi_{32}) \cdot C_{\cdot 17} \cdot R_{\cdot 17} \cdot R_{\cdot 17} - \lambda \cdot R_{\cdot 17} \cdot (d\phi_{33} / dt)$$

Третья масса лопатки турбины статорной ступени:

$$J_{34} \cdot (d^2 \phi_{34} / dt^2) = (\phi_{33} - \phi_{34}) \cdot C_{\cdot 18} \cdot R_{\cdot 18} \cdot R_{\cdot 18} - \lambda \cdot R_{\cdot 18} \cdot (d\phi_{34} / dt)$$

Приведенная система дифференциальных уравнений решалась методом Рунге – Кутты по программам *FORTRAN*.

## 5 Собственные частоты упругой модели ротора двигателя

Для исследования динамики упругой системы необходимо знать собственные частоты ее. Но система нелинейная, с

переменной жесткостью зубьев шестерен. Практика численных исследований таких систем позволяет упрощенно линеаризовать их, принимая вместо переменной жесткости постоянное усредненное ее значение.

По результатам наших расчетов методами конечных элементов [8] значения удельных жесткостей зубьев шестерен одно двух парного зацепления принимались: в полюсе зацепления  $-C_o = 18825,0H / мм^2$ ; в начале и конце зацепления  $-C_k = 14407,0H / мм^2$ . Имея аналитическое выражение для жесткостей зубьев с одно - двух парном зацеплении, среднее значение жесткости в зацеплении можно найти интегральным способом. В случае параболической аппроксимации:

$$C_{CP} = \frac{1}{p} \int_0^{(\varepsilon \cdot p)} C \cdot dx = \frac{1}{p} \int_0^{(\varepsilon \cdot p)} [(C_K + 4 \cdot (C_o - C_K) \cdot (x / (\varepsilon \cdot p)) \cdot (1 - (x / (\varepsilon \cdot p)))] \cdot dx = (C_K + \frac{2}{3} \cdot (C_o - C_K)) \cdot \varepsilon$$

при синусоидальной зависимости:

$$C_{CP} = \frac{1}{p} \int_0^{(\varepsilon \cdot p)} C \cdot dx = \frac{1}{p} \int_0^{(\varepsilon \cdot p)} [C_K + (C_o - C_K) \cdot \sin((\pi / (\varepsilon \cdot p) \cdot x)] \cdot dx = (C_K + \frac{2}{\pi} \cdot (C_o - C_K)) \cdot \varepsilon$$

Видно, что удельная жесткость зацепления зависит от коэффициента перекрытия  $\varepsilon$  и пропорциональна ей. Например, как в рассматриваемом редукторе, при коэффициенте перекрытия  $\varepsilon = 1.293$  для средне интегрального значения удельной жесткости в зацеплениях зубьев солнечного колеса при параболической аппроксимации:

$$C_{CP} = \varepsilon C_K + \frac{2}{3} \cdot (C_o - C_K) \cdot \varepsilon = 22437,0H / мм^2$$

При синусоидальной:

$$C_{CP} = (C_K + \frac{2}{\pi} \cdot (C_o - C_K)) \cdot \varepsilon = 22265,2H / мм^2$$

Разница очень небольшая. Тогда при параболической аппроксимации удельной жесткости зубьев в зацеплении шестерен числе сателлитов редуктора - средне интегральное значение крутильной

жесткости солнечного колеса в зацеплении зубьев всех шестерен для нашего изделия (расчетной упругой модели) будет:

$$C = C_{cp} \cdot b_c \cdot r_{o1} \cdot r_{o1} \cdot a_c = 35,0 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м} .$$

Принимая для свободных колебаний упругой системы редуктора постоянное значение жесткости зубьев шестерен при их без зазорном зацеплении без внешнего возбуждения и демпфирования решения:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a_1 \cdot \sin(p \cdot t), & \varphi_2 &= a_2 \cdot \sin(p \cdot t), \\ \varphi_3 &= a_3 \cdot \sin(p \cdot t), & \varphi_4 &= a_4 \cdot \sin(p \cdot t), \\ \varphi_5 &= a_5 \cdot \sin(p \cdot t), & \varphi_6 &= a_6 \cdot \sin(p \cdot t), \end{aligned}$$

и подставляя в исходную систему дифференциальных уравнений, получим алгебраическую систему линейных однородных уравнений: Для того, чтобы принятые решения действительно имели место, необходимо, чтобы определитель системы равнялся нулю. Последовательно изменяя значения частот  $p$ , и вычисляя методом Гаусса численное значение определителя, по смене знак его находим значения собственных частот упругой системы. Для примера в таблице 2 приводятся значения собственных частот для случая одно - двух парного зацепления с перекрытием  $\varepsilon=1.293$  для всего ротора двигателя вместе с лопатками. В таблице 3 приводятся резонансные частоты вращения ротора без лопаток в оборотах в минуту при числе зубьев солнечного колеса  $z = 36$  и коэффициенте перекрытия в зубьях шестерен  $\varepsilon = 1.293$ . В таблице 4 приводятся значения собственных частот этого же ротора но без лопаток компрессора и турбины. В таблице 5 приводятся парциальные значения собственных частот лопаток компрессора и турбины при жесткой заделке в их основании (как бы, на отдельном испытательном стенде в лаборатории). Конечно, наличие лопаток на

роторе меняет значения и спектр частот его. И в спектре частот ротора не проявляются частоты лопаток при лабораторных испытаниях.

В таблице 6 приводятся результаты расчетов динамики для различных вариантов изготовления зубьев шестерен и различных вариантов упругой модели двигателя при максимальном режиме нагружения ее как в ранее существовавшем варианте. Как оказалось при сделанных расчетах такая нагрузка слишком большая для упрощенной модели какая здесь приводится. Расчетов было проведено большое количество. В данной же работе приводятся значения частот и напряжений только в основаниях и а около вершины лопаток первой ступени компрессора, хотя обрабатывались результаты расчетов всех дискретных масс упругой системы. Гармонического анализа спектров вибраций не производилось, и все результаты расчетов оценивались только визуально и приближенно по графикам программы EXCEL. Сначала рассмотрим результаты расчетов для случая вынужденных вибраций при постоянном средне интегральном значении жесткостей зубьев в зацеплениях шестерен редуктора, то есть, без изменения параметров упругости системы модели. Это делается для того, что бы определить собственные частоты упругой системы, резонирующих на гармоническую частоту возбуждения от зубьев солнечного колеса –  $z = 36$ , и выявить отличие характера вынужденного гармонического возбуждения упругой систем от ее параметрического возбуждения при циклическом изменении жесткости за счет пересопряжения зубьев в зацеплениях шестерен. Кроме графиков приводятся и таблицы с результатами численных значений всех расчетных параметров для облегчения анализа процессов в упругой системе изделия.

Таблица 2. Собственные частоты (Гц) всего ротора вместе с лопатками при коэффициенте перекрытия в зубьях шестерен –  $\varepsilon = 1.293$  м при среднее интегральном значении удельной жесткости в зацеплении зубьев шестерен  $C_{Ср} = 224370$  Н/мм<sup>2</sup>

308.6	1049,2	1634.6	3001.6	4892.8	8883.4	12909.8	22251.6	29788.0
518.5	1174.0	2042.8	3673.1	4986.7	10376.6	13786.2	22985.0	31835.5
610.1	1300.1	2300.4	4003.3	5911.1	10469.4	15028.2	27043.1	
1014.5	1375.8	2732.6	4255.7	8606.2	11055.4	16830.1	28284.0	

Таблица 3. Резонансные частоты вращения ротора без лопаток (об/мин) при числе зубьев солнечного колеса  $z = 36$  и коэффициенте перекрытия в зубьях шестерен –  $\varepsilon = 1.293$

365,9	6561,0	7576,4	14773,6	23445,6	37081,3	43868,8	49598,5
3549,1	7145,9	11592,7	17479,2	28042,7	37946,1	47137,5	52056,4

Таблица 4. Собственные частоты (Гц) ротора без лопаток при коэффициенте перекрытия в зубьях шестерен –  $\varepsilon = 1.293$

219,5	3936,6	5745,9	8864,2	14067,4	22248,8	26321,3	29759,1
2129,4	4287,5	7195,6	10487,5	16825,6	22767,7	28282,5	31833,8

Таблица 5. Парциальные собственные частоты лопаток (Гц)

	N ступени	Частоты (Гц)		
Компрессор	Первая	1015	2048	3528
	вторая	1147	2305	3981
	Третья	1375	2765	4750
	Четвертая	1525	3069	5265
турбина	Первая	1570	3170	5425
	Вторая	1380	2777	4760

Таблица 6. Частоты вращения ротора (об/мин) при которых лопатки могут резонировать с парциальными собственными частотами, при числе зубьев шестерен  $z=36$

	N ступени	Частоты (Гц)		
Компрессор	Первая	609	1227	2117
	вторая	688	1383	2383
	Третья	825	1659	2850
	Четвертая	915	1841	3159
турбина	Первая	943	1902	3255
	Вторая	828	1666	2856

## 6 Заключение

В сложных упругих системах с зубчатыми колесами вследствие переменной жесткости в процессе зацепления зубьев всегда могут происходить параметрические резонансы и параметрическая неустойчивость. В первую очередь это относится к эвольвентным прямозубым передачам одно двух парного зацепления.

Параметрическая возбуждаемая упругая система колеблется сразу по всем собственным формам и частотам, но особенно сильно проявляют себя формы колебаний как наименее энергоёмкие. Но при этом всегда заметно проявление и вынужденных вибраций с зубной частотой.

Зазоры в зацеплениях зубьев шестерен не влияют на параметрические вибрации упругой системы, если в зубьях не происходит размыкание их контактов. При больших вибрациях, когда происходит размыкание зубьев в контактах зубьев упругая система становится нелинейной и возникают большие низкочастотные вибрации.

В передачах с одно двух парным зацеплением для уменьшения интенсивности параметрических вибраций желательно применять разношаговость в области двух парного зацепления на одном из зубчатых колес или фланкирование на обоих сопряженных колес передачи. Разношаговость с точки зрения теории механизмов – это мгновенное кинематическое смещение профиля зуба в окружном направлении в зоне двух парного зацепления. Этот способ модификации зубьев зубчатых колес значительно снижает уровень вибраций на резонансных оборотах изделия, хотя в области параметрической неустойчивости он, все же, малоэффективен. Это происходит потому, что в области параметрической неустойчивости зубья контактируют то в области двух парного то в области однопарного зацеплений. Когда контакты происходят в области двух парного зацепления разношаговость снижает

уровень вибраций, а когда контакты происходят в области однопарного зацепления разношаговость не может повлиять или мало влияет на уровень вибрации.

## Список использованных источников

- [1] Курушин, М. И. Экспериментальные исследования причин возбуждения колебаний элементов турбовинтового двигателя с дифференциальным редуктором / М. И. Курушин, В. Б. Балякин, А.М. Курушин // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. - 2014. - Т. 16. - №4. - С. 152-158.
- [2] Balyakin V. B. Mathematical Modeling of the Two Mass Gear System with Consideration of Shaft Compliances / V. B. Balyakin, M. I. Kurushin // Applied Mechanics and Materials. - 2015. - Vol. 770. - P. 343-348.
- [3] Курушин, М. И. Параметрическая неустойчивость динамики зубчатых колёс / М. И. Курушин, В. Б. Балякин, А. М. Курушин // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королёва. - 2014. - № 5/1. - С.106-111.
- [4] Kurushin, M. I. Methods of controlling vibration in elastic systems with gear / M. I. Kurushin, V. B. Balyakin // Procedia Engineering, 2th Conference Dynamics and Vibroacoustics of Machines. - 2015. - Vol.106. - P. 192-201.
- [5] Mucchi E. Elastodynamic analysis of a gear pump. Part II: Meshing phenomena and simulation results / E. Mucchi, G. Dalpiaz, A. Rivola // Mechanical Systems and Signal Processing. - 2010. - Vol. 24. - P. 2180-2197.
- [6] Rafiee M. Modeling and mechanical analysis of multiscale fiber-reinforced graphene composites: Nonlinear bending, thermal post-buckling and large amplitude vibration / M. Rafiee, F. Nitzsche, M.R. Labrosse // International Journal of Non-Linear Mechanics. - 2018. - Vol.103. - P. 104–112.
- [7] Ankouni, M., Lubrecht, A. A., Velex, P. Modelling of damping in lubricated line contacts - Applications to spur gear dynamic simulations / M. Ankouni, A. A. Lubrecht, P. Velex // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. - 2015. - Vol. 230 (7-8). - P. 1222-1232.
- [8] Расчёт толщины смазочного слоя в зубчатых передачах и подшипниках качения / Коднир Д. С., Крушин М. И., Ратнер и др. // Материалы конференции «Зубчатые передачи авиационных изделий». - 1968. - С. 452-463.
- [9] Курушин М. И. Исследование жёсткости зубьев двух и трёх парного зацепления / М. И.,

Курушин, В. Б. Балякин, В. Б. Оссиала // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. - 2016. - Т.18. - № 4 (6). - С. 1013-1020.

[10] Новиков Д. К. Динамика ротора газотурбинного двигателя с гидродинамическими демпферами в опорах / Д. К. Новиков, В. Б. Балякин // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 1999. - №2. - С. 28-34.

Mikhail I. Kurushin,  
Valeriy B. Balyakin,  
Venceslas Ossiala

Samara University  
443086, Russia, Samara,  
34, Moskovskoye shosse,  
029-029@mail.ru

## INVESTIGATION OF THE TORSIONAL VIBRATIONS OF A ROTOR TURBINE ENGINE WITH A DIFFERENTIAL REDUCTION GEARBOX

*In this paper, the dynamics of turbine engine with a differential reduction gearbox is considered. Only natural torsional oscillations are investigated. In the framework of solving the problem of dynamics of elastic systems, according to experimental data and in our studies by the finite element method for one pair of conjugate teeth, it can be assumed that the dependence is close to a quadratic parabola or to a sinusoid. The hydrodynamic damping of vibrations of the elastic system rotor and how lubricant layer in the gears engagements in the splined joints, are considered. The Eigenfrequencies (Hz) of all rotors together with the blades and without the blades at a constant overlap coefficient in the gear teeth are also investigated. Revealed that, overstrain of the teeth in engagement of the gear wheels leads to parametric oscillations of the engine blades.*

**Key words:** Dynamics; differential reduction gearbox; torsional vibrations; stiffness; overlap coefficient; hydrodynamic damping; elastic model

## References

- [1] Kurushin, M.I., Balyakin, V.B. and Kurushin, A.M. (2014), "Experimental investigation of the courses of vibration excitation of elements of gas turbine engines with a differential reduction gearbox" [Eksperimental'nye issledavaniya pritsin vobuzhdeniya kolebaniy elementov nurbovintovogo dvigatelya s differentsial'nym reduktorom], *Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk*, vol. 16, no.4, pp. 152-158.
- [2] Balyakin, V.B. and Kurushin, M.I. (2015), "Mathematical Modeling of the Two Mass Gear System with Consideration of Shaft Compliances", *Applied Mechanics and Materials*, vol. 770, pp. 343-348.
- [3] Kurushin, M.I., Balyakin, V.B. and Kurushin, A.M. (2014), "Parametric instability of the dynamics of gearwheels" [Parametricheskaya neusnoyshivost' dinamiki zubchatykh koles], *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo ajerokosmicheskogo universiteta im. akademika S.P. Koroljova*, no. 5/1, pp. 106 - 111.
- [4] Kurushin, M.I. and Balyakin, V.B. (2015), "Methods of controlling vibration in elastic systems with gear", *2th Conference Dynamics and Vibroacoustics of Machines, Procedia Engineering*, vol. 106, pp. 192-201.
- [5] Mucchi, E., Dalpiaz, G. and Rivola, A. (2010), "Elastodynamic analysis of a gear pump", Part II: Meshing phenomena and simulation results, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 24, pp. 2180-2197.
- [6] Rafiee, M., Nitzsche, F. and Labrosse, M.R. (2018), "Modeling and mechanical analysis of multiscale fiber-reinforced graphene composites: Nonlinear bending, thermal post-buckling and large amplitude vibration", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol.103, pp. 104-112.
- [7] Ankouni, M., Lubrecht, A.A. and Velez, P. (2015), "Modelling of damping in lubricated line contacts - Applications to spur gear dynamic simulations", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 230 (7-8), pp. 1222-1232.
- [8] Kodnir D.S. et al. (1968), "Calculation of lubricant layer thickness in gears and rolling bearings", *Materialy konferentsii "zubchfye peredachi aviatsionnykh isdeliy*, pp. 452-463.
- [9] Kurushin M.I., Balyakin, V.B. and Ossiala V.B. (2016), "Investigation of the stiffness of teeth of two and three gear pairs", *Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk*, vol. 18, no.4 (6), pp. 1013-1020.
- [10] Novikov D.K. and Balyakin V.B. (1999), "Dynamics of the rotor of a gas turbine engine with hydrodynamic dampers in the supports" [Dinamika rotora gazoturbinnovo dvigatelya s gidrodinamitseskimi dempferami v oporakh], *Problemy mashinostroeniya I nadezhnosni mashin*, no.2, pp. 28-34.