

## УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ КОЛЕБАНИЙ ВИБРОЗАЩИТНЫХ СИСТЕМ С ДИНАМИЧЕСКИМ ГАСИТЕЛЕМ

**В.И. Чернышев,  
О.В. Фоминова**

Орловский государственный  
университет  
имени И.С. Тургенева  
ул. Комсомольская, 95,  
г. Орел, Российская Федерация  
302026  
chernyshev\_46@mail.ru

*В статье рассматриваются теоретические аспекты управления процессом колебаний в системах виброзащиты с динамическим гасителем на основе использования современных информационных технологий. Дано обоснование принципа минимума и минимаксной процедуры формирования оптимального управления процессами колебаний. Показано, что прямой метод интегрирования уравнений состояния, при соблюдении минимаксной процедуры, позволяет непосредственно на каждом шаге интегрирования, находить значения компонент вектора оптимального управления. Алгоритм минимаксной процедуры принципа минимума использован для решения оптимизационной задачи динамического гашения колебаний, – найдена синтезирующая функция управления, которая позволяет устранить резонансные явления и обеспечить затухание переходных процессов в пределах одного периода кинематического воздействия.*

***Ключевые слова:** Оптимальное управление; принцип минимума; синтезирующая функция управления; прерывистое демпфирование; виброзащитная система с динамическим гасителем; математическое моделирование*

### 1 Введение

Основные положения прикладной теории виброзащитных систем, как управляемых динамических объектов, разрабатываются и развиваются в рамках теории оптимального управления [1], [2], [3]. В этой связи все объективные трудности, которые встречаются при решении оптимизационных задач данного типа, не нашли должного разрешения и в прикладной теории. Так введение присоединенного вектора вдвое увеличивает размерность исходной модели динамического объекта и усложняет её анализ, а сведение оптимизационной задачи управления к аналогу краевой задачи предопределяет использование достаточно сложных информационных технологий, которые не всегда позволяют находить недостающие начальные условия.

Применительно к системам виброзащиты существует потребность в разработке новых алгоритмов нахождения оптимального управления, которые не связаны непосредственно с решением краевой задачи [4], [5]. Но это возможно только тогда, когда

отпадает необходимость в использовании компонент присоединенного вектора и соответствующих дополнительных дифференциальных уравнений. Очевидно, что такая возможность предоставляется, если использовать общие подходы метода динамического программирования, т.е. выполнять процедуры «однозначной координации» оптимального управления с компонентами колебательного процесса и с принятым критерием качества. Причем данная координация должна осуществляться в амплитудно-фазовой области, то есть на каждом шаге интегрирования исходной системы дифференциальных уравнений. Следует отметить, что в данной постановке процедура нахождения оптимальных алгоритмов управления динамическими процессами носит достаточно общий характер и, как следствие, применима не только к линейным, но и к нелинейным объектам.

Переход к управляемым системам виброзащиты, в составе которых имеются упруго присоединенные массы (динамические гасители), предпринимается с целью устранить известные недостатки

метода динамического гашения колебаний [6], [7], [8]. Основные недостатки данного метода связаны с тем, что необходимо выполнять условие синхронизации колебаний на парциальных частотах, учитывать большие (резонансные) амплитуды колебаний присоединенной массы и длительность переходных процессов.

Известны различные способы управления процессом динамического гашения колебаний [1,9]. Наиболее перспективным является способ непрямого управления параметрами упругодемпфирующих звеньев системы, который использует «полную» информацию о движении как защищаемого объекта и присоединенной массы, так и подвижного основания [10], [11]. Среди соответствующих систем реализующих не прямое управление следует выделить системы с демпфером прерывистого действия и с дополнительным упругим элементом переменной жесткости [12], [13].

Чтобы разобраться, как формируются компенсационные воздействия, при которых достигается положительный эффект реализации управляемого процесса динамического гашения колебаний, необходимо корректно поставить и решить соответствующую оптимизационную динамическую задачу. Для решения данных задач используют математический аппарат теории оптимального управления [2], [14]. Однако получить аналитическое решение удастся только в отдельных случаях. Поэтому, как правило, используют численные методы и современные информационные технологии [15].

## 2 Математическая модель и постановка оптимизационной задачи управления

Расчетная схема нелинейной виброзащитной системы с управляемым динамическим гасителем приведена на рисунке 1.

Управление процессом динамического гашения колебаний осуществляется посредством изменения вязкого

сопротивление демпфера, который установлен последовательно между динамическим гасителем и подвижным основанием [16]. Такое расположение управляемого демпфера позволяет использовать «полную» текущую информацию для эффективного формирования компенсационного воздействия.

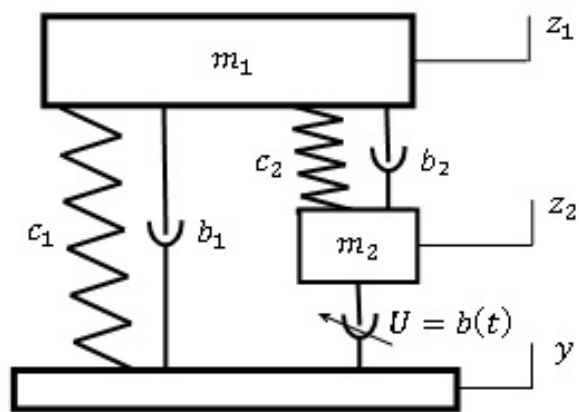


Рисунок 1. Расчетная схема виброзащитной системы с управляемым динамическим гасителем

В теоретическом плане управление отождествляется с вязким сопротивлением  $U(t) = b(t)$ .

Принимаем, что значения вязкого сопротивления ограничены  $0 \leq U(t) \leq U_0$ .

При детерминированном кинематическом возмущении  $y(t) = y_0 \sin \omega t$  уравнения, описывающие движение данной системы, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \ddot{z}_1 &= -\frac{1}{m_1} [b_1 (\dot{z}_1 - \dot{y}) + c_1 (z_1 - y) + \\
 &+ b_2 (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + c_2 (z_1 - z_2)] = \\
 &= f_1(z_1, \dot{z}_1, z_2, \dot{z}_2, t),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{z}_2 &= -\frac{1}{m_2} [b_2 (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + c_2 (z_2 - z_1) + \\
 &+ U(t) (\dot{z}_2 - \dot{y})] = f_2(z_1, \dot{z}_1, z_2, \dot{z}_2, U, t).
 \end{aligned}$$

Не нарушая общности постановки оптимизационной задачи, будем полагать, что нелинейные характеристики упругих элементов имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} c_1 &= \alpha_1 + \beta_1 (z_1 - y)^2, \\ c_2 &= \alpha_2 + \beta_2 (z_1 - z_2)^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  – постоянные коэффициенты.

Сформулируем задачу оптимального управления процессом динамического гашения колебаний [14].

Для системы уравнений (1), представленной в форме Коши:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= x_1, \quad \dot{x}_1 = f_1(x, t), \\ \dot{x}_2 &= x_3, \quad \dot{x}_3 = f_2(x, u, t), \end{aligned} \quad (3)$$

требуется найти управление  $u$ , при котором функционал

$$\int_0^T x_1^2 dt \rightarrow \min, \quad (4)$$

определяющий эффективность виброзащиты, принимает минимальное значение.

При переходе от системы уравнений (1) к (3) приняты следующие подстановки:  $z_1 \rightarrow x_0, \dot{x}_1 \rightarrow x_1, z_2 \rightarrow x_2, \dot{x}_2 \rightarrow x_3, u = U(t)$ .

Используем формализм Гамильтона [14], запишем гамильтониан:

$$H = -x_1^2 + p_0 x_1 + p_1 f_1(x, t) + p_2 x_3 + p_3 f_2(x, u, t). \quad (5)$$

Компоненты присоединенного вектора  $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  определяются из уравнений [16]:

$$\dot{p}_i = -\partial H / \partial x_i \quad (i = 0, \dots, 3) \quad (6)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \dot{p}_0 &= -p_1 \frac{\partial f_1(x, t)}{\partial x_0} - p_3 \frac{\partial f_2(x, u, t)}{\partial x_0}, \\ \dot{p}_1 &= -p_0 - p_1 \frac{\partial f_1(x, t)}{\partial x_1} - p_3 \frac{\partial f_2(x, u, t)}{\partial x_1} + 2x_1, \\ \dot{p}_2 &= -p_1 \frac{\partial f_1(x, t)}{\partial x_2} - p_3 \frac{\partial f_2(x, u, t)}{\partial x_2}, \\ \dot{p}_3 &= -p_1 \frac{\partial f_1(x, t)}{\partial x_3} - p_3 \frac{\partial f_2(x, u, t)}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из принципа максимума Понтрягина [14] находим структуру оптимального управления:

$$\max_u H \rightarrow \max_u [p_3 f_2(x, u, t)]. \quad (8)$$

Отсюда:

$$u = \begin{cases} u_0, p_3 (x_3 - \dot{x}_2(t)) < 0, \\ 0, p_3 (x_3 - \dot{x}_2(t)) > 0. \end{cases} \quad (9)$$

Объединим уравнения (3) и (7) в одну систему, используя замены:  $p_0 \rightarrow x_4, p_1 \rightarrow x_5, p_2 \rightarrow x_6, p_3 \rightarrow x_7$  и свертку информации  $u = u_0 \cdot \text{if} [x_7 (x_3 - \dot{x}_2(t)) < 0, 1, 0]$  для (9). В результате получаем замкнутую систему уравнений не содержащих явно управление  $u$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= x_1, \quad \dot{x}_1 = f_1(x, t), \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = f_2(x, t), \\ \dot{x}_4 &= -x_5 \frac{\partial f_1(x, t)}{\partial x_0} - x_7 \frac{\partial f_2(x, t)}{\partial x_0}, \\ \dot{x}_5 &= -x_4 - x_5 \frac{\partial f_1(x, t)}{\partial x_1} - x_7 \frac{\partial f_2(x, t)}{\partial x_1} + 2x_1, \\ \dot{x}_6 &= -x_5 \frac{\partial f_1(x, t)}{\partial x_2} - x_7 \frac{\partial f_2(x, t)}{\partial x_2}, \\ \dot{x}_7 &= -x_5 \frac{\partial f_1(x, t)}{\partial x_3} - x_7 \frac{\partial f_2(x, t)}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (10)$$

Путем решения объединенной системы уравнений (11) можно определить оптимальное управление и совокупность оптимальных фазовых координат и компонент присоединенного вектора.

На интервале  $0 \dots t \dots 2\pi/\omega = T$  фазовые координаты и управление должны удовлетворять условию периодичности. В этом случае решение системы уравнений (11) сводится к решению краевой задачи, когда поиск неизвестных периодических конечных значений фазовых координат производится при заданных нулевых конечных значениях компонент присоединенного вектора:

$$\begin{aligned} x_i(0) &= x_i(T), \quad (i = 0, \dots, 3) \\ x_j(0) &= 0, \quad x_j(T) = 0. \quad (j = 4, \dots, 7) \end{aligned} \quad (11)$$

Соотношения (12) определяют признак оптимальности получаемых решений для совокупности фазовых координат и компонент присоединенного вектора и, как следствие, для управления (9).

Как уже отмечалось решение краевой задачи, особенно в нелинейной постановке, крайне затруднено. Поэтому далее будем использовать алгоритм минимаксной процедуры, который позволяет находить решение оптимизационных задач данного типа посредством прямого интегрирования исходной системы дифференциальных уравнений – в нашем случае дифференциальных уравнений (3). При этом уравнения и соотношения краевой задачи (10) и (11) можно использовать для проверки полученного оптимального решения.

### 3 Минимаксная процедура нахождения оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимального управления:

$$J = \int_0^T F(x, u, t) dt \rightarrow \min, \quad (12)$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (x, u) \in V. \quad (13)$$

Требуется найти допустимый процесс  $\tilde{v} = (\tilde{x}, \tilde{u}) \in V$ , который минимизирует функционал (12) при наличии внешних дифференциальных связях и заданных ограничениях (13).

Поскольку

$$\min \int_0^T F(x, u, t) dt = \int_0^T F(\tilde{x}, \tilde{u}, t) dt, \quad (14)$$

то достаточным условием оптимальности является

$$\min_{(x, u) \in V} F(x, u, t) = F(\tilde{x}, \tilde{u}, t) \text{ при } t \in [0, T]. \quad (15)$$

Соотношение (15) и определяет принцип минимума для исходной оптимизационной задачи (12), (13).

Обоснуем возможность применения прямого метода последовательной (пошаговой) реализации принципа минимума для нахождения оптимального управления процессом виброзащиты.

Системы виброзащиты относятся к классу динамических систем, которые совершают колебательные движения, т.е. в фазовом пространстве изображающая точка описывает периодически замкнутые фазовые траектории. Это свойство должно сохраняться при любом допустимом управлении.

На основании сказанного сформулируем следующее утверждение.

**Теорема принципа минимума.** Если при допустимом управлении  $\tilde{v} \in U$ , которое находится в результате применения прямого метода последовательной (пошаговой) реализации принципа минимума (15), система виброзащиты совершает колебательные движения, то данное допустимое управление является оптимальным.

Применение минимаксной процедуры принципа минимума гарантирует, что на

допустимом процессе  $\varphi = (\dot{x}, \dot{y}) \in V$  интегральный критерий качества принимает наименьшее значение по сравнению с возможными его значениями на других допустимых процессах,

$$\text{т.е. } \int_0^T F(x, u, t) dt > \int_0^T F(\dot{x}, \dot{y}, t) dt.$$

Если в результате минимаксной процедуры получен оптимальный процесс, то на любом «внутреннем» интервале следования, например, от некоторой промежуточной точки к конечной точке фазового пространства соответствующий процесс также является оптимальным. Аналогичное утверждение справедливо в отдельности и для управления и для фазовой траектории, поскольку они являются «переменными» одного и того же оптимального процесса. В частности, любой отрезок (участок) оптимальной фазовой траектории, полученной в результате минимаксной процедуры, также будет оптимальным.

#### 4 Результаты моделирования

В результате моделирования установлено, что оптимальные переключения управляемого демпфера по алгоритму «включить – выключить» происходят при смене знака соответственно относительной и абсолютной скорости, то есть демпфер включается в работу, когда изменяется знак относительной скорости  $(\dot{z}_2 - \dot{y}(t))$ , а выключается из работы, когда изменяется знак абсолютной скорости  $\dot{z}_1$ .

В таблице 1 приведены выборочные результаты расчетов коэффициентов динамичности – безразмерных амплитуд установившихся колебаний защищаемого объекта  $A(\eta) = z_1/y_0$  и присоединенной массы  $B(\eta) = z_2/y_0$  при следующих параметрах системы (1):  $\mu = m_2/m_1$ ;  $\lambda = c_2/c_1$ ;  $k_1 = \sqrt{c_1/m_1}$ ;  $\varepsilon_1 = b_1/m_1 k_1$ ;  $\varepsilon_2 = b_2/m_1 k_1$ ;  $u_0 = U_0/m_1 k_1$ .

Таблица 1. Амплитуды колебаний  $A(\eta)$  и  $B(\eta)$  (числитель / знаменатель)

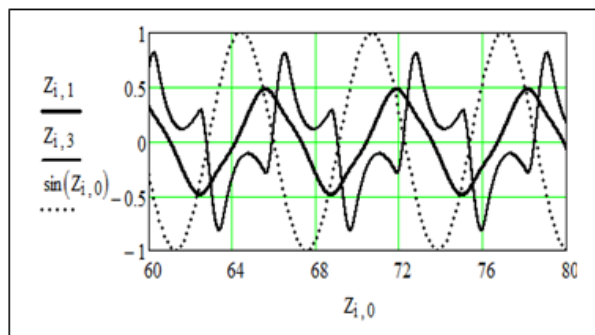
$\eta = \omega/k_1$							$\beta_1 =$
0,8	1,	1,	1,	1,	1,	2,	
	0	2	4	6	8	0	
1,06 1,45	0, 83	0,5 2	0,3 6	0,2 9	0,2 5	0,24 0,7	0,0
	1, 37	1,0 1	0,8 2	0,7 3	0,6 9	0,7 2	
1,08 1,45	1, 04	0,6 3	0,4 2	0,3 3	0,2 7	0,2 4	0,2
	1, 58	1,1 8	0,9 3	0,7 9	0,7 4	0,7 0	
0,99 1,43	0, 66	0,4 3	0,3 3	0,2 6	0,2 4	0,2 1	0,2
	1, 16	0,8 8	0,7 5	0,6 7	0,6 7	0,6 2	
Примечание: $\mu = 0,1$ ; $\lambda = 2$ ; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,1$ ; $u_0 = 6$ ; $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .							

Сопоставлялись варианты моделирования системы с линейной  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ , жесткой  $\beta_1 = \beta_2 > 0$  и мягкой  $\beta_1 = \beta_2 < 0$  характеристикой упругих элементов (2).

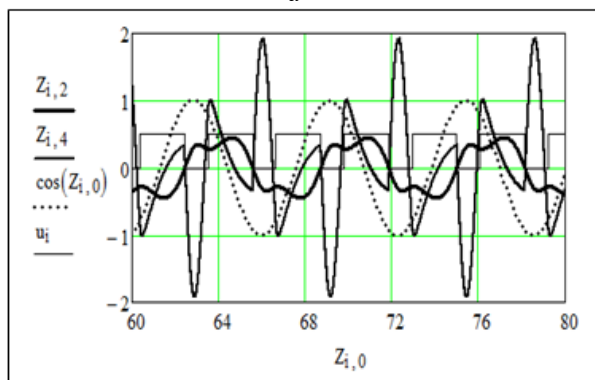
В диапазоне частот  $0,8 \leq \eta \leq 2$  амплитуды колебаний  $A(\eta)$  и  $B(\eta)$  монотонно уменьшаются с увеличением частоты кинематического возмущения. Это свидетельствует о том, что при оптимальном управлении резонансные явления в системе не проявляются. Причем на опорной частоте  $\eta = 1,4$  значения коэффициентов динамичности для защищаемого объекта меньше единицы в 3,04, 2,72 и 2,38 раза, соответственно, при мягкой, линейной и жесткой характеристике упругих элементов. Данный положительный эффект при использовании нелинейных упругих элементов с мягкой характеристикой проявляется на всем рассматриваемом диапазоне частот. Характерно также, что амплитуды колебаний  $B(\eta)$  ограничены и соизмеримы с амплитудой кинематического возмущения. Так в области высоких частот они всюду меньше единицы. Как следствие, при проектировании виброзащитных систем с управляемым динамическим гасителем данного типа можно существенно

уменьшить габариты для подсистемы «упругий элемент – присоединенная масса».

Характерные графики колебательных процессов и П-образных циклограмм управления представлены на рисунке 2.



а



б

$$\eta = 1,4; u_0 = 2,0; \lambda = 2,0; \varepsilon_1 = 0,1; \varepsilon_2 = 0,1;$$

$$u_i = 0,5(u/u_0); Z_{i,1} = z_1/y_0; Z_{i,2} = \dot{z}_1/y_0\omega;$$

$$Z_{i,3} = z_2/y_0; Z_{i,4} = \dot{z}_2/y_0\omega$$

Рисунок 2. Графики перемещений (а); графики скоростей и П-образных циклограмм управления (б)

При установившихся колебаниях графики перемещений и скорости защищаемого объекта являются полигармоническими с преобладающей первой (основной) гармоникой, частота которой совпадает с частотой кинематического возмущения. Следует отметить, что переходные процессы, например, при ударном воздействии затухают в пределах одного периода, то есть исследуемая система обладает повышенными противоударными свойствами, которые можно

охарактеризовать следующим образом: «один толчок – одно колебание».

## 5 Заключение

Сформулирована и обоснована теорема принципа минимума для управляемых виброзащитных систем, – если при допустимом управлении, которое находится в результате применения прямого метода последовательной (пошаговой) реализации принципа минимума, виброзащитная система совершает колебательные движения, то данное допустимое управление является оптимальным. Алгоритм минимаксной процедуры, который реализует прямой метод последовательного решения оптимизационной задачи при численном интегрировании исходных уравнений состояния системы, позволяет на каждом шаге интегрирования находить значения компонент вектора оптимального управления. При этом признак «замкнутости фазовых траекторий легко контролируется» и не осложняет процесс реализации минимаксной процедуры принципа минимума.

В результате использования информационных технологий, обеспечивающих реализацию принципа минимума, была решена оптимизационная задача динамического гашения колебаний, – найдена синтезирующую функцию управления, которая позволяет устранить резонансные явления и обеспечить затухание переходных процессов в пределах одного периода кинематического воздействия. Установлено, что динамические свойства систем данного типа существенно зависят от нелинейных характеристик упругих элементов.

## 6 Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда по проекту № 16-19-00186.

## Список использованных источников

[1] Вибрации в технике: Справочник. Т.6. Защита от вибрации и ударов / Под ред. акад. К. В. Фролова. – М.: Машиностроение, 1981. – 456 с.

[2] Троицкий В. А. Оптимальные процессы колебаний механических систем / В. А. Троицкий. – Л.: Машиностроение, 1976. – 248 с.

[3] Фомина О. В. Прерывистое демпфирование в системах виброзащиты: основы теории, приложения / О.В. Фомина. – М.: Машиностроение-1, 2005. – 256 с.

[4] Чернышев В.И. Проявление локального эффекта в методе динамического программирования и оптимальное управление виброзащитных систем / Чернышев В.И. // Известия вузов. Приборостроение, 1993. – № 5. – С. 55-59.

[5] Фомина О. В. Теоретические аспекты формирования оптимальных управляемых процессов виброзащиты / О. В. Фомина, Л. А. Савин, В. И. Чернышев // Известия юго-западного государственного университета. Серия: техника и технологии, Издательство: ЮЗГУ. - Курск, 2013. – № 3. – С. 44-50.

[6] Баландин Д. В. Синтез активного динамического гасителя колебаний с использованием линейных матричных неравенств. // Д. В. Баландин, И. А. Федоров // Вестник Нижегородского университета им. Н.Н. Лобачевского, 2007. – № 6. – С. 153-159.

[7] Чернышев В. И. Виброзащитная система с управляемым динамическим гасителем / В. И. Чернышев, О. В. Фомина, Т. А. Барбашова // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии, 2011. – № 5. – С. 3-10.

[8] Чернышев В.И., Фомина О.В., Барбашова Т.А. Оптимизация процесса демпфирования в системе виброзащиты с динамическим гасителем / В. И. Чернышев, О. В. Фомина, Т. А. Барбашова // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии, 2014. – № 5 – С.47-52.

[9] Чернышев В. И., Фомина О. В., Петракова О. А., Колинко Е. А. Динамический гаситель // Патент России № 2374520. 2008. Бюл. № 33.

[10] Бенсуан А. Импульсное управление и квазивариационные неравенства / А. Бенсуан, Ж. Лиож. – М.: Наука, 1987. – 596 с.

[11] Чернышев В. И. Ударное демпфирование колебаний при непрямом импульсном управлении / В. И. Чернышев // Известия Вузов, Машиностроение, 1997. – № 7-9. – С. 5-10.

[12] Чернышев В. И. Система виброизоляции с управляемым демпфером / В. И. Чернышев, О. В. Фомина, Е. Б. Белозерова // Справочник. Инженерный Журнал, 2012. – № 6. – С. 3-10.

[13] Чернышев В. И. Систематизация виброзащитных систем с дополнительным упругодемпфирующим звеном прерывистого

действия / В. И. Чернышев, О. В. Фомина, Е. М. Гнеушева // Справочник. Инженерный Журнал, 2004. – № 9. – С. 31-35.

[14] Фомина О. В. Экстремальные задачи и оптимизация: введение в теорию непрямого импульсного управления процессами колебаний / О. В. Фомина, Ю. С. Степанов, В. И. Чернышев. – М.: Издательский дом «Спектр», 2011. – 218 с.

[15] Ивановский Р. И. Компьютерные технологии в науке и образовании. Практика применения систем Mathcad Pro / Р. И. Ивановский. – М.: Высш. шк., 2003. – 431 с.

[16] Чернышев В. И., Фомина О. В., Барбашова Т. А. Динамический гаситель // Патент на полезную модель № 122721 РФ, опубл. 10.12. 2012. Бюл. № 34.

**CONTROLLING THE VIBRATION PROCESS OF VIBRATION PROTECTION SYSTEMS WITH DYNAMIC DAMPING**

**Vladimir I. Chernyshev,  
Olga V. Fominova**

Orel State University  
named after I.S. Turgenev  
95, Komsomolskaya st.,  
Orel, Russian Federation  
302026  
chernyshev\_46@mail.ru

*The article deals with theoretical aspects of controlling the oscillation process in vibration protection systems with a dynamic damping based on the use of modern information technologies. The justification of the principle of minimum and minimax procedure for the formation of optimal control of oscillation processes is given. It is shown that a direct method of integrating the equations of state, when observing the minimax procedure, allows us to find the values of the components of the optimal control vector directly at each integration step. The minimax procedure algorithm of the minimum principle is used to solve the optimization problem of dynamic damping of oscillations. A synthesizing control function is found that allows eliminating resonant phenomena and providing attenuation of transient processes within a single period of kinematic action.*

**Key words:** *Optimal control; the principle of a minimum; synthesizing control function; intermittent damping; vibration-proof system with a dynamic damping; mathematical modeling*

## References

- [1] Frolova, K.W. (ed.) (1981), *Vibrations in technology: Reference. Protection from vibration and shock*, Mechanical Engineering, Moscow, Russia, vol. 6, 456 p.
- [2] Troitsky, V.A. (1976), *Optimal processes of oscillations of mechanical systems*, Mechanical Engineering, Leningrad, Russia, 248 p.
- [3] Fominova, O.V. (2005), *Intermittent damping in systems of vibration-shielding: the fundamentals of the theory, applications*, Mashinostroenie-1, Moscow, Russia, 256 p.
- [4] Chernyshev, V.I. (1993), "The manifestation of a local effect in the method of dynamic programming and the optimal control of vibration protection systems", *News of universities, Instrument making*, no. 5, pp. 55-59.
- [5] Fominova, O.V., Savin, L.A. and Chernyshev, V.I. (2013), "Theoretical aspects of the formation of optimal controlled vibration protection processes", *Izvestiya Yugo-Zapadnogo Gosudarstvennogo Universiteta, Series: technika and technology [Proceedings of the South-West State University. Series: equipment and technology]*, Publisher: YuZG, Kursk, Russia, no. 3, pp. 44-50.
- [6] Balandin, D.V. and Fedorov, I.A. (2007), "Synthesis of an active dynamic vibration damper using linear matrix inequalities", *Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod*, Nizhni Novgorod, Russia, no. 6, pp. 153-159.
- [7] Chernyshev, V.I., Fominova, O.V. and Barbashova, T.A. (2011), "Vibroprotective system with controlled dynamical dampener", *Fundamental and applied problems of technology and technology*, no. 5, pp.3-10.
- [8] Chernyshev, V.I., Fominova, O.V. and Barbashova, T.A. (2014), "Optimization of the damping process in the system of protection with a dynamic absorber", *Fundamental and applied problems of engineering and technology*, no. 5, pp. 47-52.
- [9] Chernyshev, V.I., Fominova, O.V., Petrakova, O.A. and Kolinko, E.A., Oryol State Technical University (2008), Dynamic damping, RF Pat. 2374520.
- [10] Bensuan, A. and Liogg, J. (1987), *Pulse control and quasi-variational inequalities*, Nauka, Moscow, Russia, 596 p.
- [11] Chernyshev, V.I. (1997), "Impact damping of oscillations with indirect impulse control", *News of Higher Educational Institutions, Mechanical Engineering*, no. 7-9, pp. 5-10.
- [12] Chernyshev, V.I., Fominova, O.V. and Belozerova, E.B. (2012), "System of vibration isolation with a controlled damper", *Handbook, Engineering Journal*, no. 6, pp. 3-10.
- [13] Chernyshev, V.I., Fominova, O.V. and Gneusheva, E.M. (2004), "Systematization of vibration protection systems with an additional elastic-damping link of intermittent action. Handbook", *Engineering Journal*, no. 9, pp. 31-35.
- [14] Fominova, O.V., Stepanov, Yu.S. and Chernyshev, V.I. (2011), *Extreme problems and optimization: introduction to the theory of indirect pulse control of vibration processes*, Publishing House "Spektr", Moscow, Russia.
- [15] Ivanovsky, R.I. (2003), *Computer technologies in science and education. Practice of application of Mathcad Pro systems*, Higher education, Moscow, Russia.
- [16] Chernyshev, V.I., Fominova, O.V. and Barbashova, T.A. (2012), *Dynamic damping*, Russia, Patent for utility model no. 122721.