

Р.А. Сунарчин

Санкт-Петербургский
 Политехнический университет
 Петра Великого
 Политехническая, 29,
 г. Санкт-Петербург,
 Российская Федерация
 195251

sunar1939@mail.ru

П.В. Петров

Уфимский государственный
 авиационный
 технический университет,
 Карла-Маркса, 12
 г. Уфа, Респ. Башкортостан,
 Российская Федерация
 450000

pgl.petrov@mail.ru

АВТОКОЛЕБАНИЯ МАЯТНИКА ФРУДА (ЧИС- ЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ)

Представлено численное исследование автоколебаний фрикционного маятника Фруда. Для сравнения с приближенным аналитическим или графическим решениями в качестве одной из аппроксимаций характеристики трения принята кубическая аппроксимация; показаны изменения в случае других аппроксимаций.

По результатам проведенного вычислительного эксперимента были построены характеристики амплитуды автоколебаний от безразмерных коэффициентов, комплексов подобия, которые показали сходимость расчетных и фактических (полученных при численном интегрировании) значений амплитуд автоколебаний для малых значений трения и крутизны характеристики; при увеличении момента амплитуды также увеличиваются.

Отмечено, что результаты компьютерного моделирования будут существенно зависеть от конструкции, технологии изготовления и условий эксплуатации рассматриваемого устройства.

Ключевые слова: численные методы; автоколебания; нелинейная модель; сила сухого трения

1 Введение

В расчетной практике наибольшее распространение получили достаточно удобные линейные модели. Однако они, во-первых, описывают действительные физические явления приближенно, а, во-вторых, что еще более важно, многие физические явления буквально исчезают при малейшей попытке их линеаризации. Автоколебания – как раз тот случай, только случае учета нелинейностей в механизмах подвода и стока энергии возможно определить установившиеся стационарные колебания, предельный цикл.

Маятник Фруда с одной стороны является типичным автоколебательным устройством, имеющим все элементы автоколебательных систем, а с другой – имеет существенную особенность: движущей силой является сила контактного трения, являющаяся весьма

нестабильной и зависящей от многих факторов и условий эксплуатации.

Исследование механических автоколебательных систем, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка, обычно выполняется приближенными аналитическими или графическими методами; и те и другие являются весьма приближенными и трудоемкими.

Численные методы, в отличие от аналитических, позволяют исследовать специфические особенности физических процессов, конструктивные особенности устройств и влияние внешних условий, т.е. выполнять наиболее полное имитационное моделирование систем.

В последнее время произошел существенный скачок в развитии средств вычислительной техники. Выросла производительность современных компьютеров, и вместе с тем появился

целый ряд программных продуктов – специализированных математических пакетов, способных решать задачи практически любой сложности. Одновременно с этим, появляется понятие численного эксперимента, т. е. численного решения поставленной задачи при помощи вычислительных средств с использованием встроенных в математические пакеты функций дифференцирования, интегрирования и др.

Маятник Фруда описывается дифференциальным уравнением второго порядка, численное решение короткого не представляет особых трудностей.

2 Постановка задачи

Рассмотрим фрикционный маятник с одной степенью свободы, рис.1. Маятник 1 прикреплен к муфте, насаженный на вал 2, вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω . Механизм возбуждения колебаний связан с падающей характеристикой силы сухого трения между трущимися поверхностями вала и муфты маятника [1-5].

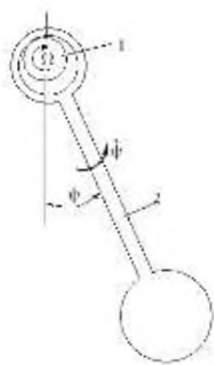


Рисунок 1. Фрикционный маятник
1 - Вал; 2 - Маятник

Это сравнительно сложное неоднозначное техническое устройство. Посадка вала и муфты – свободная, с каким-то зазором (на рисунке место сочленения показано с утрированным зазором) и другими особенностями. Но наибольшую неопределенность вносит сила фрикционного трения, которая в данном случае является движущей, что существенно

осложняет ситуацию, так как, несмотря на то, что Леонардо да Винчи еще в 1500 году поставил пять замечательных вопросов о влиянии некоторых факторов на эту силу, а Кулон правильно на них ответил, еще много вопросов остаются не разрешенными, кроме того протекание характеристики трения от относительной скорости скольжения муфты маятника и вала зависит от материалов муфты и вала, от наличия или отсутствия смазки, от технологии изготовления пары, от внешних условий и т. д. и не ясно, какой из этих факторов в данной ситуации и в данное время окажется наиболее значимым. В свое время в одном из агрегатных конструкторских бюро было изготовлено гидромеханическое вычислительное устройство, где передача движения осуществлялась трением смежных деталей, работа устройства оказалась такой не стабильной и не предсказуемой, что от него пришлось отказаться.

Публикации по маятнику Фруда [1-6] условно можно разделить на: линеаризованные, с представлением момента трения в виде полинома третьей степени, численные и экспериментальные.

В первом случае выражение для момента трения раскладывают в ряд Тейлора, вблизи значения скорости вращения вала и ограничиваются первым членом разложения. Уравнение движения маятника становится линейным, а суммарный коэффициент при первой производной может стать либо отрицательным (отрицательное сопротивление) и тогда решение будет расходящимся, или положительным и тогда система устойчива; в любом случае предельный цикл, а значит и автоколебания отсутствуют.

Во втором случае [1, 2] применяется представление характеристики трения маятника в виде полинома третьей степени, подобно той которую предложил Ван дер Поль для математического анализа генератора электромагнитных колебаний. Поразительно изящная, изощренная аппроксимация характеристики гораздо точнее и вернее отображает реальный

процесс, чем теория, предполагающая линейную зависимость, и позволяет описать процесс установления автоколебаний.

Совершенствование аппаратных средств и математического обеспечения привели к существенному прогрессу в части решений дифференциальных уравнений; теперь даже не очень опытный пользователь с использованием пакетов прикладных программ может решать задачи, которые ранее были доступны лишь опытным программистам. Если раньше стремились получить решение в символьном виде, то в настоящее время основное значение приобретает чёткая аналитическая формулировка задачи и реализуемость её на ЭВМ. Это главное отличие моделирования под компьютер, а в остальном все этапы аналитического и численного моделирования совпадают: постановка задачи исследования, допущения, составление уравнений, проверки на всех этапах и т. д.

В остальном все этапы аналитического и численного моделирования совпадают: постановка задачи исследования, допущения, составление уравнений, проверки на всех этапах и т. д. К сожалению, некоторые исследователи безосновательно уверовали, что современный персональный компьютер позволяет за несколько секунд решить любую сложную задачу, например, рассмотрим работу [5], где решается ряд физических задач с помощью пакета прикладных программ *Mathcad*: начнем с того, что в приведенных исходных данных всех задач отсутствует размерность (кстати *Mathcad* позволяет производить несложные математические преобразования с размерностями), предположим, что по умолчанию здесь принята система СИ, далее мы не поленились и, с использованием авторской копии-экрана, набрали программу 13.MCD, посвященную как раз маятнику Фруда; автоколебаний не наблюдается, если же принять коэффициент вязкого трения нулю, то в точности воспроизводится авторский график автоколебаний, но что это за автоколебания – амплитуда перемещения

200 (чего метров или радиан?), скорость колебаний достигает 20 (м/с или рад/с?), модель не выдерживает малейшей проверки на правдоподобность, можно отметить множество других промахов. И наконец, разве можно считать численное исследование законченным после получения однократного решения, где критическая оценка решения и вычислительный эксперимент? В защиту автора этой работы отметим, что моделирование маятника Фруда, являющегося относительно сложным техническим устройством, как и прочих автоколебательных устройств, особенно где имеется сухое трение, является очень непростой задачей. Очень легко критиковать любую модель, трудно создать что-то адекватное действительности, для этого, в первую очередь, следовало бы выполнить целенаправленное системное экспериментальное исследование.

Вопросы автоколебаний и методы их исследования достаточно подробно изложены в работах таких авторов как Харкевич А.А., Андронов А.А., Хайкин С.Э., Пановко Я.Г., Каннингхэм В., Блехман И.И. и др. Но несмотря на большое количество научных трудов, в этих работах очень мало результатов экспериментов, посвященных колебаниям механических систем. К примеру, у Т. Хаяси [7] каждый раздел сопровождается экспериментами, но ведь он электрик и примеры у него сплошь электрические, уж механики должны знать, где находится критерий истины. Нашлась лишь одна работа [6], посвященная экспериментальному исследованию маятника Фруда: ключевым вопросом в данном механизме является устройство и организация подшипника скольжения, однако кроме того, что перед проведением опытов его промывают спиртом и предохраняют от попадания смазки никаких подробностей не изложено. В качестве пожеланий к этой работе следует отметить малую универсальность результатов и отсутствие современных цифровых средств измерения и регистрации, которые в

настоящее время стали на удивление доступными и сравнительно не дорогими.

3 Компьютерное моделирование и численное исследование автоколебаний

Представленное в статье численное исследование намного правдоподобнее, чем в [5], но построено также лишь на логических рассуждениях и также не может претендовать на окончательное решение.

Механизм автоколебаний маятника Фруда в общих чертах можно представить в следующем виде: так как изменение скорости маятника близко к синусоидальному, то опираясь на падающую характеристику трения можно построить осциллограмму момента, которая будет состоять из некоторой постоянной M_0 и синусоидальной $\tilde{M}\sin(\omega t + \pi)$ составляющих, причем положительные значения синусоиды совпадают с попутным движением, а отрицательные с противоположными движениями маятника и вала. Поэтому за полупериод, за который вал и маятник идут в одну сторону, момент трения вала о муфту помогает колебаниям маятника, работа момента трения увеличивает энергию колебаний маятника. За следующий полупериод, когда вал и маятник вращаются в разные стороны, скорость скольжения больше, а работа момента трения, отнимающая энергию у маятника, будет меньше. За целый период вал передает энергию маятнику и увеличивает амплитуду колебаний. Амплитуда колебаний будет нарастать до тех пор, пока не наступит насыщение генерации и (или) возрастут потери энергии; в случае баланса энергий наступят автоколебания.

Пусть характеристика момента трения $M_{тр}(\Omega - \dot{\Psi})$ в зависимости от относительной угловой скорости $(\Omega - \dot{\Psi})$ известна, тогда дифференциальное уравнение движения примет вид:

$$mL^2\ddot{\psi} = -mgL\sin(\psi) - k_{M\psi}\dot{\psi} + M_{тр}(\Omega - \dot{\psi}), (1)$$

По аналогии с [2] представим характеристику трения в зависимости от

скорости маятника $\dot{\psi}$ в виде полинома третьей степени (2).

$$M_{тр}(\dot{\psi}) = M_0 + S_0 \left(\dot{\psi} - \frac{\dot{\psi}^3}{3k^2} \right) \quad (2)$$

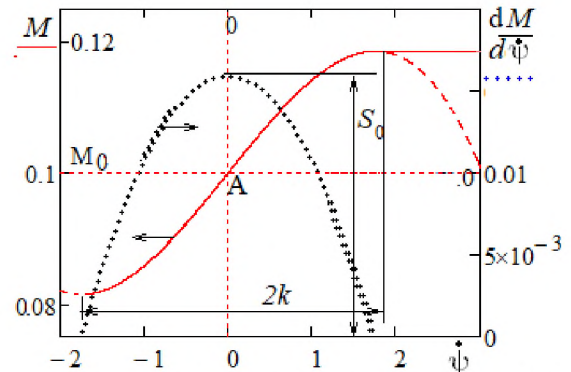


Рисунок 2. Аппроксимация полиномом 3-ей степени

Там же показаны производная этой функции (жирные точки) и ее значение (крутизна характеристики) $S_0 = \left(\frac{dM}{d\dot{\psi}} \right)$ в рабочей точке А, где скорость маятника равна нулю $\dot{\psi} = 0$, а момент равен M_0 . Зависимость момента трения от скорости обычно имеет вид, показанный на рис.2 жирной линией, аппроксимация вне пределов зоны насыщения $\approx 2k$ показана на рис.2 пунктиром.

Выполнено численное интегрирование уравнения (1) для двух случаев протекания характеристики трения. На рис.3 (см. также Приложение_1) принята характеристика момента (рис. 3а) в виде полинома третьей степени, рассчитанной по формуле (2); на фазовой характеристике (рис.3в) имеется устойчивый предельный цикл, к которому стягиваются все фазовые траектории вне зависимости от начальных условий; амплитуда автоколебаний при приведенных на рис.3 параметрах равна $A_{числ} = 0,589$ рад, что примерно соответствует ее расчетному

$$\text{значению} \quad A_{расч} = \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\frac{S_0}{\frac{3S_0}{3(2k)^2}}} = 0,559 \text{ рад}$$

(см.[2]).

Параметры, принятые при расчете характеристик, представленных на рис. 3.

$$m = 2 \text{ кг}; \quad L = 0,25 \text{ м}; \quad \Omega = 6,28 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$M_0 = 0,1 \text{ Нм}; k_v = 0; k = 0,875.$

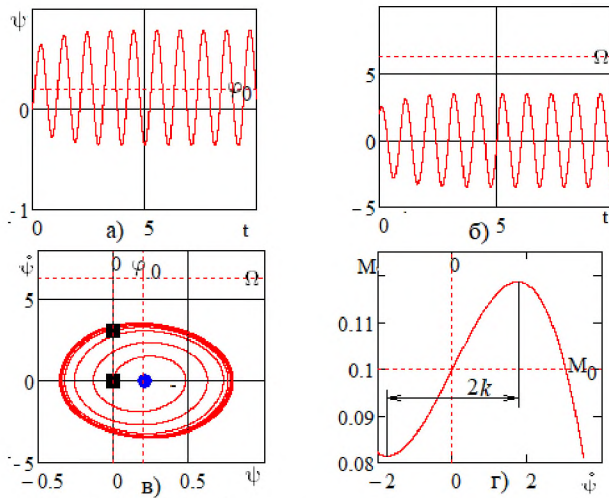


Рисунок 3. Результаты интегрирования с аппроксимацией в виде кубического полинома
а) угловое перемещение; б) угловая скорость; в) фазовые диаграммы для различных начальных условий; г) момент

Колебания в широком диапазоне параметров имеют гармонический характер (рис.4), а период для параметров к рис.3 равен $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1,003 \text{ с}$; колебания перемещения сдвинуты на угол $\psi_0 = \text{asin}\left(\frac{M_0}{mgL}\right) = 0,205 \text{ рад.}$

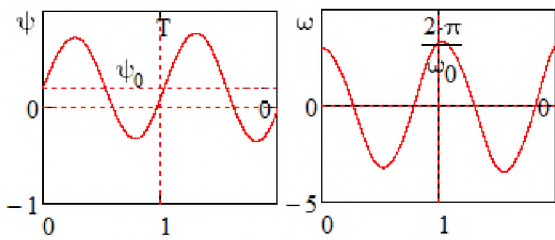


Рисунок 4. Форма автоколебаний

При интегрировании уравнения (1), результаты которого представлены на рис.5, момент трения рассчитывался по следующему выражению

$$M_{\text{тр}} = \begin{cases} \text{if } \psi < \psi_B & M_{\text{тр}}(\psi) = M_0 + S_0 \left(\psi - \frac{\psi^3}{3k^2} \right) \\ \text{иначе} & M_{\text{тр}}(\psi) = M_B \end{cases} \quad (3)$$

Такая аппроксимация, как утверждает в [1], более соответствует действительности. В работе [2] декларируется зависимость момента трения как на рис.5б, а все расчеты выполняются с кубической аппроксимацией,

показанной на рис.3г. Параметры при расчетах принимались те же, что для построения характеристик представленных на рис.3.

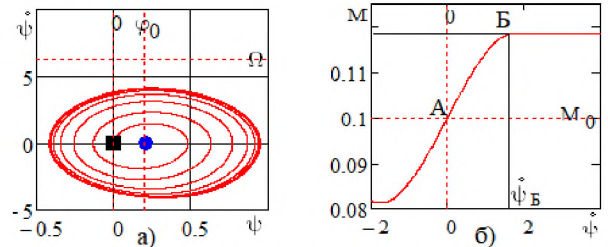


Рисунок 5. Результаты интегрирования с аппроксимацией по формуле (3)
а) фазовая диаграмма; б) момент трения

Фазовая характеристика, представленная на рис. 5а – похожа на предыдущую, но амплитуда предельного цикла ее несколько больше $\approx 0,741$ радиан. Максимальная скорость маятника, вопреки утверждениям [3], при всех вариациях параметров не достигает скорости вращения вала; при увеличении коэффициента вязкого трения сначала амплитуда уменьшается, а затем фазовая характеристика вырождается в устойчивый фокус, маятник по аperiodическому закону стремится в точку Ψ_0 и становится неподвижным.

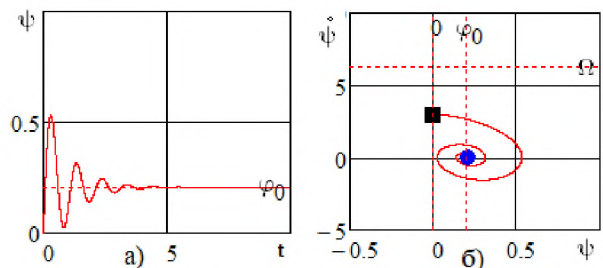


Рисунок 6. Переходные процессы при большом вязком трении ($k_{M\psi} = 0,04 \frac{\text{Нм}}{\text{рад/с}}$)

В обоих случаях расчетные предельные циклы имеют форму практически правильного эллипса. В работе [6] на экспериментальной фазовой диаграмме в районе нейтрального положения (и максимальной скорости) имеется скачок скорости и утверждается, что это свидетельство одномоментного подвода энергии от вала к маятнику. Позволим себе

не согласиться с этим: такая ситуация характерна для импульсного подвода энергии, например, в часах, здесь же все характеристики протекают плавно без разрывов. По-видимому, этот злополучный скачок обусловлен локальной шероховатостью либо иной особенностью экспериментальной установки.

Величина амплитуды автоколебаний, полученная в результате расчетов по формуле (1), увеличивается с ростом момента M_0 , крутизны характеристики S_0 и ширины зоны насыщения $2k$, но уменьшается с ростом коэффициента сопротивления $k_{M\psi}$. Результаты расчетов можно усилить, если перейти к безразмерным переменным, тогда можно представлять результаты в зависимости от безразмерных комплексов, критериев подобия, в самой структуре которых отражена сущность физических процессов, протекающих в рассматриваемом устройстве. Вводится безразмерное время $\tau = \omega_0 t$ и каждый член уравнения (1) делиться на mgL

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \bar{k}_{M\psi} \frac{d\psi}{d\tau} + \sin \psi = \bar{M}_0 + \bar{S}_{01} \frac{d\psi}{d\tau} - \bar{S}_{02} \left(\frac{d\psi}{d\tau}\right)^3, \quad (4)$$

где $\bar{k}_{M\psi} = \frac{k_{M\psi}\omega_0}{mgL}$; $\bar{M}_0 = \frac{M_0}{mgL}$; $\bar{S}_{01} = \frac{S_0\omega_0}{mgL}$;
 $\bar{S}_{02} = \frac{S_0}{3(2k)^2mgL}$; (5)

Выполнен численный эксперимент, в результате которого построены характеристики рис.6 амплитуд автоколебаний от безразмерных комплексов (5); каждый коэффициент представляет собой меру различных сил относительно возвращающей гравитационной силы, а зависимости – обобщенные характеристики автоколебаний. На рис.6в также приведена аналитическая зависимость (жирная сплошная линия), рассчитанная по формуле

$$A = \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\frac{S_0 - K_{M\psi} / (mgL)}{3(2\Delta\phi)^2}},$$

которая заимствована

из [2]; видно, что для малых значений относительного трения ($\bar{M}_0 = 0,204$)

расчетные и фактические (полученные при интегрировании) значения амплитуд автоколебаний совпадают; при увеличении момента амплитуды автоколебаний несколько увеличиваются; с ростом сопротивления амплитуды, естественно, уменьшаются.

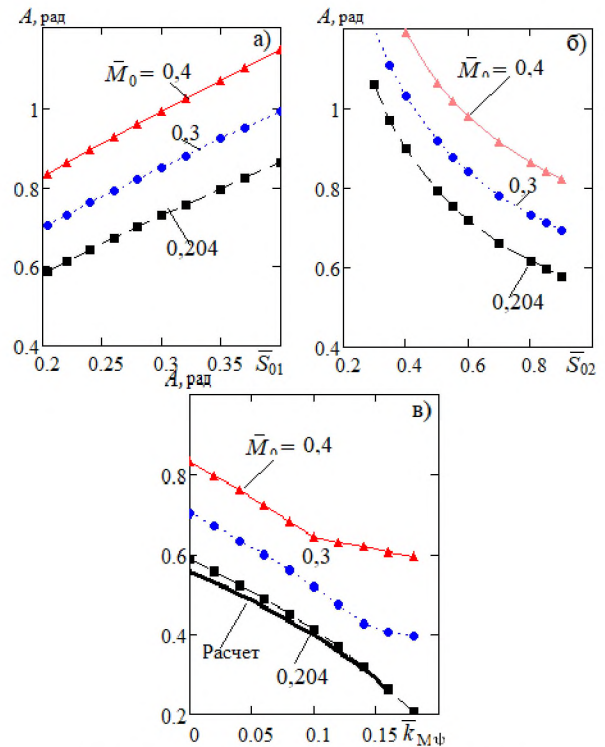


Рисунок 7. Обобщенные характеристики автоколебаний

4 Заключение

В заключении еще раз отметим, что в тех устройствах, где силы сухого трения соизмеримы или тем более, как в данном устройстве являются ведущими, может наблюдаться существенная неустойчивость характеристик, зависящая от конструкции, технологии изготовления, условий эксплуатации и пр. Поэтому до математического моделирования и вообще проектирования желательно выполнить эксперимент, лучше натурный, а если лабораторный, то с максимально соответствующим натуре узлом фрикционного трения.

Проведенное исследование можно считать начальным этапом большой работы,

связанной с изучением особенностей физических процессов в механических системах, потому как таких особенностей много и каждое нуждается в тщательном рассмотрении. Также работа осложняется отсутствием, либо наличием сложных комплексных физико-математических описаний многих явлений, необходимых для моделирования сложных систем.

Список использованных источников

- [1] Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. Изд. 2-е, перераб., М.: Наука, 1964, 437 с.
- [2] Алишкевич В. А., Деденко Л. Г., Караваев В. А. Колебания и волны. Лекции. (Университетский курс общей физики). – М.: Физический факультет МГУ, 2001. – 144 с.
- [3] Магнус К. Колебания: Введение в исследование колебательных систем. Пер. с нем. – М.: Мир, 1982. – 304 с., ил.
- [4] Каудерер Г. Нелинейная механика. Пер. с нем. Пановко Я. Г. Изд. «Иностранная литература», 1961, 777 с.

- [5] Майер Р. В. Решение физических задач с помощью пакета MathCAD [Электронный ресурс]/ Р. В. Майер. – Глазов: ГГПИ, 2006. – 37 с.
- [6] Молотков Н. Я., Ломакина О. В. Исследование механической автоколебательной системы. ГОУ ВПО «ТГТУ»; tol-mat@nnn.tstu.ru
- [7] Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. Издательство «МИР», Москва, 1968.

Robert A. Sunarchin

Peter the Great St.Petersburg
Polytechnic University
29, Polytechnicheskaya,
St.Petersburg, Russian Federation
195251
sunar1939@mail.ru

Pavel V. Petrov

Ufa state aviation University
technical University, Karl-Marx, 12
Ufa, Republic of Bashkortostan,
Russian Federation
450000
pvl.petrov@mail.ru

Self-oscillation of the Froude pendulum (Numerical study)

A numerical study of the self-oscillation of the Froude friction pendulum is presented. For comparison with approximate analytical or graphical solutions, the cubic approximation is used as one of the approximations of the friction characteristic; changes in the case of other approximations are shown.

By results of the conducted computational experiment was built characteristics of the amplitude of self-oscillations from dimensionless ratios, complexes of similarity, which showed the convergence of the estimated and actual (obtained by numerical integration) values of the amplitudes of oscillation for small values of friction and slope characteristics; if you increase the moment amplitude is also increased.

It is noted that the results of computer modeling will significantly depend on the design, manufacturing technology and operating conditions of the device in question.

Keywords: numerical methods; self-oscillation; nonlinear model; dry friction force

References

- [1] Strelkov S. p. Introduction to the theory of vibrations. 2nd Ed., Moscow: Science, 1964, 437 p.
- [2] Aleshkevich V. A., Dedenko L. G., Karavaev V. A. Vibrations and waves. Lectures. ((University course in General physics). Moscow: faculty of Physics, Moscow state University, 2001, 144 p.
- [3] Magnus K. Vibrations: an Introduction to the study of vibrational systems. TRANS. from German-M.: Mir, 1982. - 304 p.
- [4] Kauderer G. Nonlinear mechanics. TRANS. with him. Panovko Ya. G. Ed. "Foreign literature", 1961, 777 p.
- [5] Mayer R. V. Solving physical problems using the MathCAD package [Electronic resource] / R. V. Mayer. – Glazov: ggpi, 2006. - 37 p.
- [6] Molotkov N. Ya., Lomakina O. V. Research of mechanical self-oscillating systems. GOU VPO "TSTU"; tolmt@nnn.tstu.ru
- [7] Hayashi T. Nonlinear oscillations in physical systems. MIR publishing house, Moscow, 1968.