

Р.А. Сунарчин

Санкт-Петербургский
Политехнический университет
Петра ВеликогоПолитехническая, 29,
г. Санкт-Петербург,
Российская Федерация
195251sunar1939@mail.ru

П.В. Петров

Уфимский государственный
авиационный технический
университет,Карла-Маркса, 12
г. Уфа, Респ. Башкортостан,
Российская Федерация
450000pgl.petrov@mail.ru**СИНХРОНИЗАЦИЯ МАЯТНИКОВ (ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ)**

В работе представлены результаты численного исследования синхронизации маятников, хронометров, механических часов, подвешенных к общей подвижной балке. Рассмотрена вспомогательная задача о колебаниях маятника с качающимся привесом, затем взаимная синхронизация свободных колебаний двух и четырех маятников (и маятников с подводом импульса момента – часы) на общей подвижной подпружиненной балке. Показано, что в рассмотренной простейшей конфигурации взаимная синхронизация (равенство частот или периодов колебаний) выполняется с высокой эффективностью. Частота синхронизированных колебаний маятников близка к частоте колебаний платформы в широком диапазоне изменения ее жесткости. Степень связности маятников и синхронизация их колебаний определяется числом Струхала. Синхронизация часов не гарантирует точность их хода, которая достигается лишь в случае, когда число Струхала равно единице.

Ключевые слова: численные методы; автоколебания; нелинейная модель; сила сухого трения; синхронизация

1 Введение

Синхронизация маятников, хронометров, механических часов, подвешенных к общей подвижной балке, рассматривается в многочисленных работах [1-5]; исследование, в основном, осуществляется качественными, с использованием фазовых характеристик, или приближенными аналитическими методами.

Считается, что синхронизация, то есть свойство осцилляторов двигаться с одинаковыми скоростями (частотами) несмотря на различие индивидуальных ритмов, и осуществляется посредством «слабой» связи осцилляторов, – в рассматриваемом случае из-за едва заметных» колебаний балки. Пиковский А. [1] декларирует, что имеется зона абсолютной синхронизации, где фактические скорости равны несмотря на наличие расстройки осцилляторов. Блехманн [2] более осторожно говорит о приближенном

совпадении параметров и считает, что «в ансамбле синхронизированных осцилляторов скорости или частоты являются средне-взвешенными от совокупности парциальных значений»; в обоих случаях отсутствует экспериментальное или теоретическое обоснование этих положений. Понятие «слабого» взаимодействия объектов синхронизации, помимо указания того, что оно значительно слабее, чем между отдельными элементами самих объектов, так же не объясняется и количественно не оценивается. С одной стороны, под этим подразумеваются «едва заметные колебания балки», с другой – «малость сил связи между осцилляторами». Кстати, именно малость сил связи послужила основанием для использования метода малого параметра для приближенного решения существенно нелинейного дифференциального уравнения см. [2]. Какое перемещение и сила связи являются малыми и по сравнению с чем? Если балка восприни-

мает реакцию со стороны маятника, то маятник воспринимает точно такую же, а не малую силу, от балки? В случае синхронизации частоты осцилляторов равны (рассматривается взаимная синхронизация), а амплитуды и фазы могут отличаться? Вопросы эти можно продолжить.

В работе поставлены задачи: уточнить физический механизм внутренней, взаимной синхронизации осцилляторов, разработать детальную и, насколько возможно, адекватную математическую модель синхронизации маятников, подвешенных на общей балке и провести численное исследование с целью получения ответов хотя бы на некоторые поставленные вопросы.

2 Маятник с качающимся привесом

Рассмотрим простейший случай о маятнике с качающимся привесом. В печати подробно рассматривается эта задача см., например, [5] с. 287. Если точка привеса совершает прямолинейные горизонтальные гармонические колебания около неподвижной точки O с амплитудой $OO_1 = A \sin(\omega t)$, то на математический маятник рис.1 массой m длиной L начинает действовать переносная сила инерции, направленная по горизонтали и равная

$$-m\ddot{x} = mA\omega^2 \sin(\omega t), \quad (1)$$

так что соответствующий момент составляет

$$M = mA\omega^2 \sin(\omega t) L \cos(\varphi). \quad (2)$$

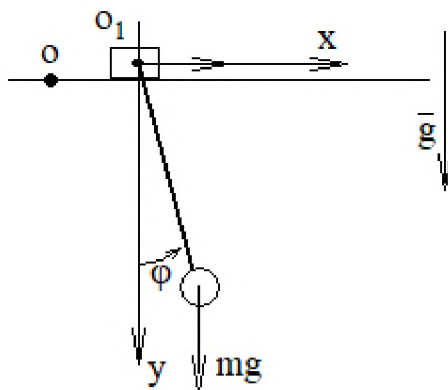


Рисунок 1 – Маятник с качающимся привесом

С учетом массовой возвращающей силы и силы вязкого сопротивления дифференциальное уравнение относительного движения маятника можно записать в виде

$$mL^2 \ddot{\varphi} = -mgL \sin(\varphi) + mA\omega^2 \sin(\omega t) L \cos(\varphi) - k_{M\varphi} \dot{\varphi}, \quad (3)$$

где $k_{M\varphi}$ – коэффициент вязкого трения.

Разделив каждый член уравнения на mL^2 и обозначая частоту собственных колебаний $k = \sqrt{g/L}$, получим:

$$\ddot{\varphi} = -k^2 \sin(\varphi) + \left(\frac{A\omega^2}{L}\right) \sin(\omega t) \cos(\varphi) - k_{M\varphi} \dot{\varphi}, \quad (4)$$

где $k_{M\varphi} = \frac{k_{M\varphi 1}}{mL^2}$.

Уравнение (4) является нелинейным, так как включает в себя трансцендентные функции. Точное решение – не существует, аналитическое решение его можно получить в линейном приближении или каким-либо другим приближенным методом (метод вариации постоянных, гармонической линеаризации и др.). В статье выполнено численное решение уравнения (4), приводится анализ и сравнение численного решения с другими методами.

В линейном приближении уравнение (4) принимает совсем простую форму

$$\ddot{\varphi} = -k^2 \varphi + \left(\frac{A\omega^2}{L}\right) \sin(\omega t) - k_{M\varphi} \dot{\varphi}, \quad (5)$$

Аналитическое решение уравнения (5) без учета трения см. [5] имеет вид:

$$\varphi_{\text{лин}} = \frac{A\omega^2}{L(k^2 - \omega^2)} \left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{k} \sin(kt) \right) \quad (6)$$

На верхней строчке рис.2 приведены результаты расчета по формуле (6) при небольших значениях частоты возмущающего сигнала, а на нижней – результаты численного интегрирования уравнения (4) методом Рунге в интегрированной среде Mathcad так же при небольших значениях ω ; на рис.2г приведены оба переходных процесса совместно, – совпадение хорошее. Переходные

процессы – периодические, но не гармонические.

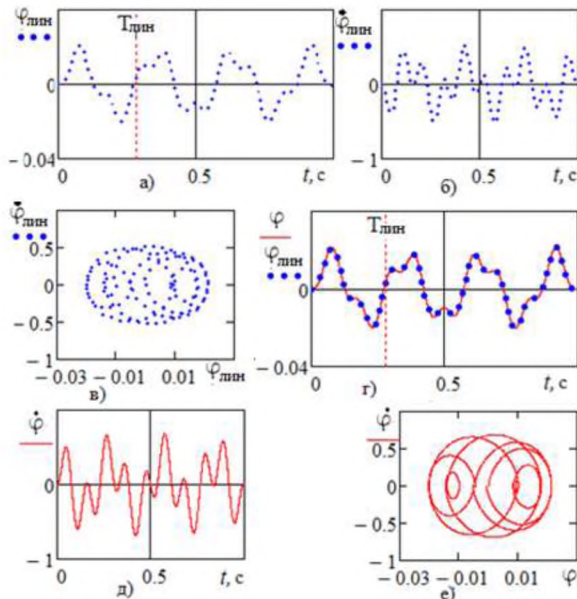


Рисунок 2 – Сравнение результатов по линейной и нелинейной моделям при малых частотах внешнего воздействия $\omega = 60,1/c$ (Параметры расчета: $L = 0,02$ м; $A = 0,0001$ м; $k = 22,147 \frac{1}{c}$.)

При последовательном увеличении частоты колебаний возмущающей силы амплитуды колебания маятника растут, но также увеличивается разница линейных и нелинейных колебаний маятника, так на рис.3 показаны осциллограммы при частоте $\omega \approx 8856$ 1/с, амплитуда линейных колебаний стремиться примерно к 2 рад, а нелинейных – к π , причем при этом маятник как бы зависает в верхней точке и по прохождении некоторого отрезка времени движется в обратном направлении; период нелинейных колебаний $T_{нлн}$ получается примерно в два раза больше, чем у линейных колебаний (см. рис.3а). Значение частоты $\omega \approx 8856$ не является какой-то неизменной константой, так при амплитуде $A=10^{-3}$ м похожая картина наблюдается уже при частоте $\omega \approx 885$, то есть в десять раз меньшей, анализ размерностей показал, что определяющим фактором является так называемая приведенная частота $\bar{\omega} = \frac{\omega A}{kL}$, критическое значение приведенной частоты, как показало численное исследование, равно

$\bar{\omega}_{кр} = 2$, поэтому количественные зависимости далее будут приведены в зависимости от приведенной частоты.

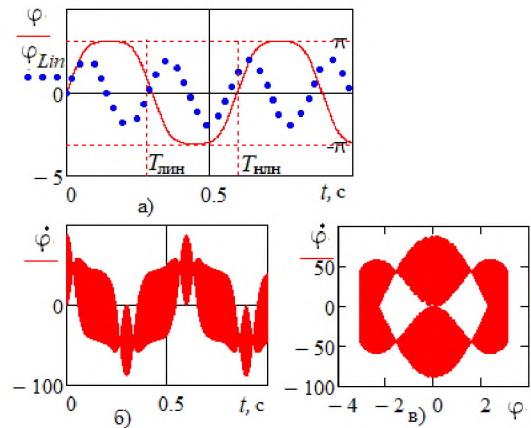


Рисунок 3 – Осциллограммы при большой частоте внешнего воздействия $\omega = 8858,6$ (Параметры расчета: $L = 0,02$ м; $A = 0,0001$ м; $k = 22,147 \frac{1}{c}$.)

При дальнейшем увеличении частоты колебаний подвеса свыше критической маятник (см. рис4) начинает вращаться, зависая каждый раз в нечетных положениях $(2n-1)\pi$.

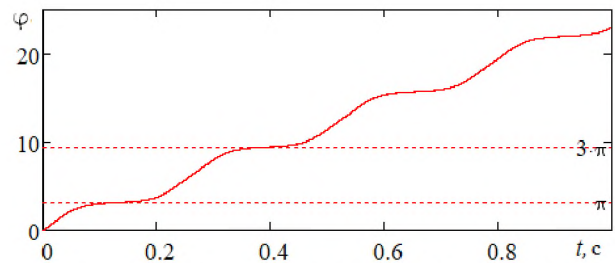


Рисунок 4 – Вращение маятника при частотах, больше, чем $\omega = 8885$ 1/с

С использованием уравнения (4) выполнен численный эксперимент по определению зависимостей периода и амплитуды автоколебаний от частоты внешнего воздействия; результаты показаны на рис. 5.

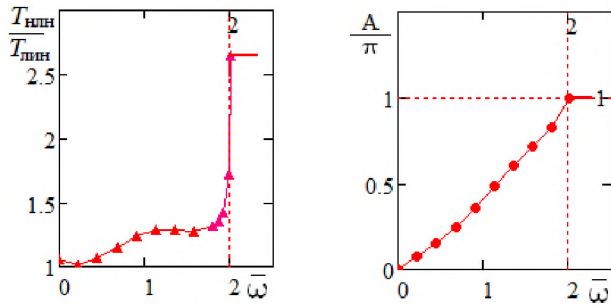


Рисунок 5 – Вращение маятника при частотах, больше, чем $\omega = 8885$ 1/с

Видно, что с ростом частоты возмущения ω период растет: сначала – медленно, а с приближением к $\bar{\omega} = 2$ – катастрофически, достигая значения $\bar{T} = T/T_{\text{лин}} \approx 2,5$ и далее не изменяется, амплитуда (вернее полуразмах колебаний) постоянно нарастает, достигая значения π и далее не изменяется.

3 Синхронизация колебаний двух маятников

В предыдущем случае частота внешнего воздействия ω задавалась извне и рассматривалась как постоянная величина. Рассмотрим простейший пример (см.рис.б) синхронизации колебаний маятников, подвешенных на упругой платформе (балка), которая может перемещаться относительно неподвижного основания только в горизонтальном направлении по оси x . Платформа связана с основанием посредством пружины с жесткостью c_x и линейного демпфирующего элемента k_{vx} . К платформе подвешены два маятника, оси вращения которых перпендикулярны оси x . Принятая к рассмотрению расчетная схема чрезвычайно проста, ее коротко можно охарактеризовать так: математические маятники, подвешенные на математической балке (в отличие от несравненно сложной схемы Гюйгенса). Но таково требование моделирования, которое предстоит довести до числа.

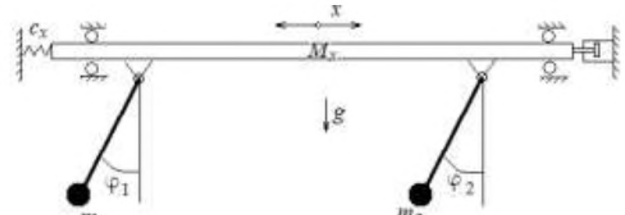


Рисунок 6 – Синхронизация колебаний двух маятников

В работе [4] для описания похожей задачи использовали систему уравнений Ван дер Поля, дополненную формально введенными членами, учитывающими перекрестное влияние маятников. Уравнения Ван дер Поля сыграли огромную роль в развитии теории автоколебаний, но они описывают гипотетические автоколебания в гипотетических генераторах электромагнитных колебаний, а в данной расчетной схеме имеется три массы, движение каждой из которых должно быть описано своим уравнением с учётом взаимного влияния, так при колебаниях маятников на платформу действуют реактивные силы (горизонтальные составляющие), в свою очередь, со стороны платформы на маятники действует переносная сила инерции. Предположим, что платформа колеблется с собственной частотой $\omega = \sqrt{c_x/M_x}$. На самом деле в рассматриваемой системе с тремя степенями свободы могут реализоваться совсем другие частоты, но если масса платформы намного больше маятников, то это допущение не так далеко от действительности; мы еще вернемся к этому вопросу при обсуждении результатов расчетов. Тогда дополнительный момент будет, как и в случае маятника с качающимся подвесом, иметь вид $M = mA\omega^2 \sin(\omega t) L \cos(\varphi)$.

Уравнения моментов маятников в этом случае подобны уравнениям (3) и (4) и с добавлением соответствующего момента будут иметь вид

$$\ddot{\varphi}_1 = -k_1^2 \sin(\varphi_1) + (\omega^2 x/L_1) \cos(\varphi_1) - k_{M\varphi 1} \dot{\varphi}_1 \quad (7)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -k_2^2 \sin(\varphi_2) + (\omega^2 x/L_2) \cos(\varphi_2) - k_{M\varphi 2} \dot{\varphi}_2, \quad (8)$$

а уравнение движения платформы

$$M_x \ddot{x} = -c_x x - k_{vx} \dot{x} + m_1 \dot{\varphi}_1^2 L_1 + m_1 g \cos(\varphi_1) + m_2 \dot{\varphi}_2^2 L_2 + m_2 g \cos(\varphi_2), \quad (9)$$

Понятно, что и эта модель далека от совершенства: желательнее чтобы балка была гибкой, расположение подвесов маятников было несимметричным, а сами подвесы были не идеальными и тому подобное. Но и эта модель, подобно первому автомобилю, который уже имел четыре колеса и руль, готова к модернизации.

Уравнения (7)-(9) с начальными условиями: $\varphi_1(0)=0$; $\dot{\varphi}_1(0)=0$; $\varphi_2(0)=0$; $\dot{\varphi}_2(0)=0$; $x(0)=0$; $\dot{x}(0)=0,05$ и одинаковыми маятниками проинтегрированы в среде Mathcad, некоторые результаты представлены на рис.7.

Как и следовало ожидать оба маятника колеблются одинаково, синфазно и синхронно.

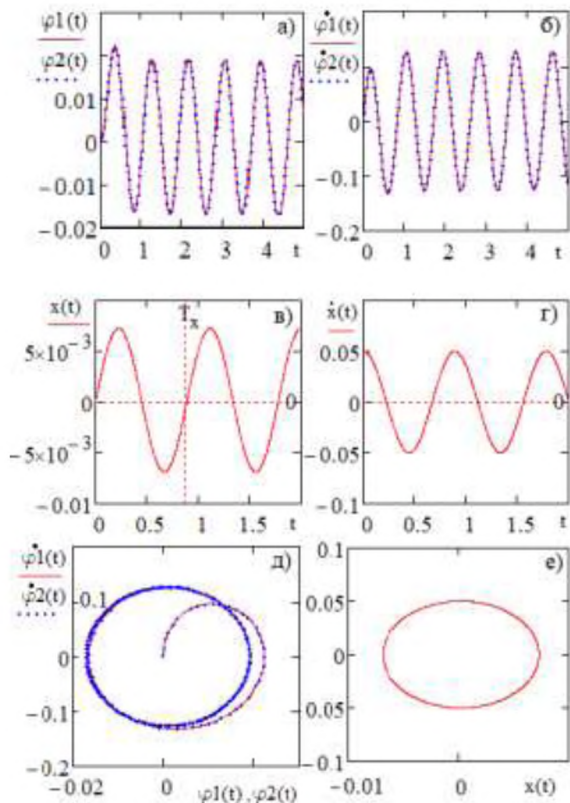


Рисунок 7 - Результаты численного интегрирования для одинаковых маятников

а) Угловые перемещения маятников; б) угловые скорости маятников; в) перемещение платформы; г) скорость платформы; д) фазовые характеристики маятников; е) фазовая характеристика платформы. $L_1 = 0,02$; $L_2 = 0,02$; $m_1 = 0,1$; $m_2 = 0,1$;

$k_{M\varphi_1} = 0,005$; $k_{M\varphi_2} = 0,005$; $M_x = 200$;
 $c_x = 10000$; $k_{vx} = 0$.

На следующем рисунке 8 длина первого маятника увеличена и составляет $L_2 = 0,024$ м м, а остальные размеры и условия остались как на рисунке 7.

Маятники даже при такой большой погрешности изготовления $\delta L = \frac{L_1 - L_2}{L_1} 100 = 17,355\%$ колеблются почти одинаково: погрешность амплитуд составляет $\delta\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1} = 9,224\%$, частоты же колебаний, что значительно важнее, практически совпадают, относительная разность периодов составляет всего $\delta T = 0,696\%$.

Форма колебаний маятников существенно зависит от значений коэффициентов вязкого трения: при нулевых значениях наблюдаются гармоники высоких порядков, при некоторых значениях коэффициента трения колебания почти гармонические, при дальнейшем увеличении трения колебания становятся сходящимися.

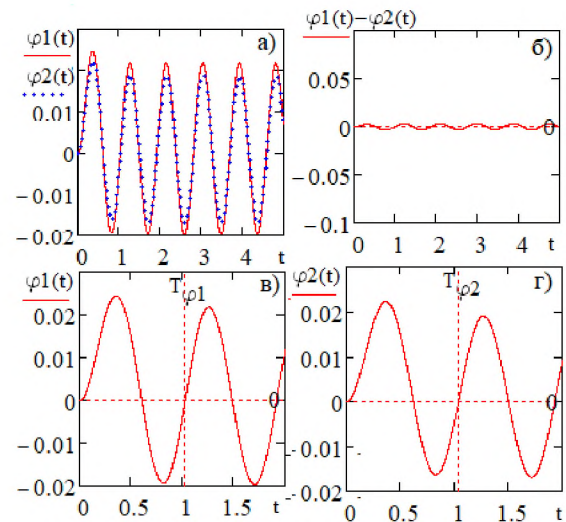


Рисунок 8 - Демонстрация синхронизации колебаний

а) Углы поворота маятников; б) разность поворотов (ошибка); в) и г) определение периодов колебаний маятников $L_1 = 0,024$; $L_2 = 0,02$; $m_1 = 0,1$; $m_2 = 0,1$; $k_{M\varphi_1} = 0,005$; $k_{M\varphi_2} = 0,005$; $M_x = 200$; $c_x = 10000$; $k_{vx} = 0$.

Рассмотренные ранее колебания являются свободными, для надлежащей формы колебаний задано небольшое значение коэффи-

циента вязкого трения. Для компенсации потерь и реализации автоколебательного процесса необходимо подвести управляющий момент. Вначале рассмотрим один изолированный маятник, уравнение моментов в данном случае будет иметь вид:

$$mL^2\ddot{\varphi} + k_{Mf}\dot{\varphi} + k^2\varphi = M, \quad (10)$$

где M – управляющий момент, который можно формировать различным образом, наиболее благоприятные условия для поддержания автоколебаний выполняются в том случае, когда импульс подводится в нейтральном положении маятника, и в направлении действия скорости; пусть момент подводится один раз за цикл

$$M = \begin{cases} \text{если } y \approx 0 \text{ и } v > 0, \\ \text{то } M = M_0 \\ \text{иначе} & M = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Теперь задача стала не только нелинейной, но и нестационарной, ее можно решить только численным способом. На рис. 9 приведены установившиеся колебания маятника, полученные непосредственным решением (10) с учетом условия (11); на фазовой диаграмме (рис. 9а) стрелкой показано место в пространстве состояний, где подводится импульс.

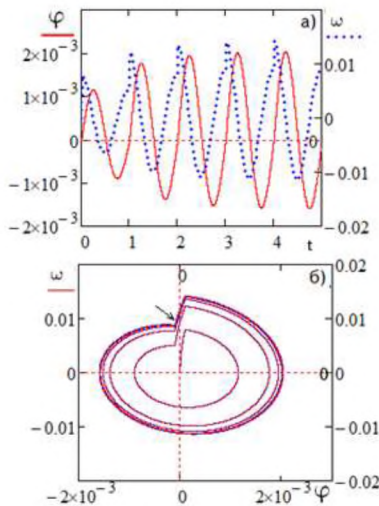


Рисунок 9 - Установившиеся колебания маятника с подводом импульса
а) Перемещение и скорость; б) фазовая диаграмма

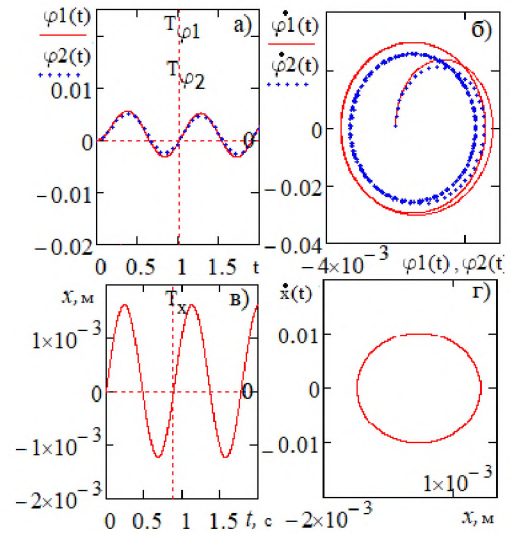


Рисунок 10 - Синхронизация маятников с подводом энергии

$L_1 = 0,024; L_2 = 0,02; m_1 = 0,1; m_2 = 0,1;$
 $k_{M\varphi 1} = 0,005; k_{M\varphi 2} = 0,005; M_x = 200;$
 $c_x = 10000; k_{vx} = 0.$

Далее составим систему уравнений для двух маятников, как и прежде, подвешенных на упругом основании, но с учетом подвода импульса (эти уравнения не приводятся, так как они практически аналогичны (7)-(9)). Численное решение, приведенное на рис.10, получается весьма похожим на рис. 8, но теперь рассматривается синхронизация автоколебательных устройств и она более эффективна, так при погрешности длины маятников $\approx 17\%$ погрешность периодов составляет всего $0,288\%$; обращает внимание отсутствие скачка скорости в точке подвода импульса на фазовой диаграмме, только при очень больших значениях момента ($\bar{M}_0 = \frac{M_0}{mgL} > 10$) начинают проявляться слабые признаки скачка.

Аналогичное исследование выполнено для четырех маятников с подводом энергии; модель в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_i &= -k_i^2 \sin(\varphi_i) + (\omega^2 x / L_i) \cos(\varphi_i) - \\ & k_{M\varphi i} \dot{\varphi}_i + M_i \\ M_x \ddot{x} &= -c_x x - k_{vx} \dot{x} + \\ & \sum_1^4 m_i \dot{\varphi}_i^2 L_i + \sum_1^4 m_i g \cos(\varphi_i), \end{aligned} \quad (13)$$

где $i = 1 \div 4$.

Результаты интегрирования системы (13) показаны на рис. 12; несмотря на самые разнообразные начальные условия маятники стремятся колебаться синхронно. В дальнейшем все исследования выполнялись на модели с подводом импульса силы и для $i = 2$.

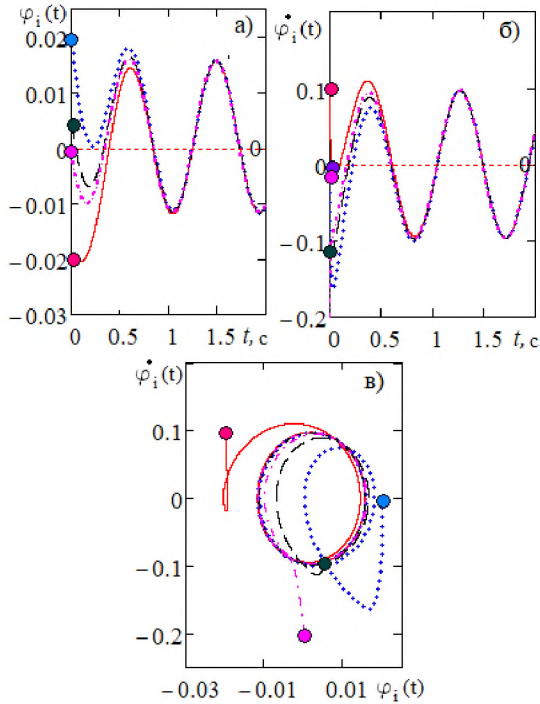


Рисунок 12 - Переходные процессы для четырех маятников
 а) перемещение; б) скорости; в) фазовая диаграмма

С использованием системы (7)-(9) выполнено исследование влияния различных факторов на результаты интегрирования. Так на рис.13 показано влияние жесткости пружины основания на периоды колебаний маятников (треугольники) и платформы (жирная штриховая линия); периоды колебаний маятников измерялись с использованием подпрограммы $T_\varphi = \text{root}(\varphi(t_i) - \varphi(0), t_i)$, где $\varphi(0)$ и $\varphi(t_i)$ – соответственно, значения функций в нулевой и t_i моменты времени, а t_i – время, в районе которого ожидается наступление нового периода колебаний, а период колебания платформы рассчитывался по формуле $T_x = \frac{2\pi}{\sqrt{c_x/M_x}}$.

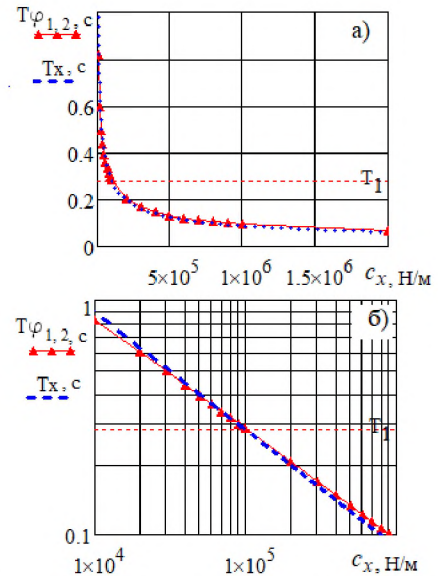


Рисунок 13 - Влияние жесткости пружины основания $L_1 = L_2 = 0,02$ м; $m_1 = m_2 = 0,1$ кг;

Видно, что периоды колебаний маятников (в данном опыте параметры маятников одинаковы и потому $T_{\varphi_1} = T_{\varphi_2}$) очень близки к периоду колебаний платформы; кривые пересекаются (это хорошо видно в логарифмическом масштабе на рис.9б) в точке, где значения периодов равны $T_{1,2} = \frac{2\pi}{k_{1,2}}$. Следовательно, платформа навязывает обоим маятникам одну, свою собственную частоту колебаний – этим, по-видимому, объясняется эффект синхронизации в данной схеме. Таким образом, применительно к часам синхронизация не обеспечивает точности хода, особенно на малых частотах (погрешность хода при больших частотах меньше). Точный ход можно обеспечить при подборе параметров балки, при котором собственные частоты балки и маятников равны, то есть, когда $\omega = k$.

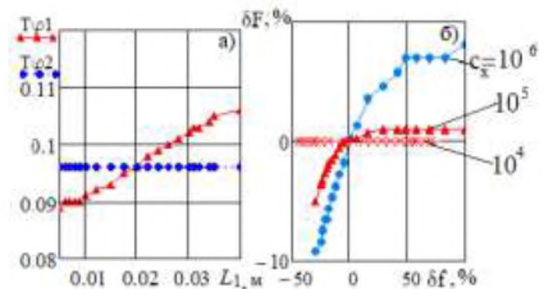


Рисунок 14 - Синхронизация маятников при расстройке частот

На рис. 14а показано изменение периодов колебаний маятников при изменении длины первого маятника в диапазоне $L_1 = 0,005 - 0,04$ м, длина второго маятника при этом $L_2 = 0,02$ м = const, а жесткость пружины основания $c_x = 10^6$ Н/м; период первого маятника растет, а второго – остается без изменения. На рис. 14б эти результаты перестроены в виде зависимости относительного изменения частоты колебаний от относительной расстройки по

$$\text{формулам } \delta F = \frac{\frac{1}{T_{\varphi 1 i}} - \frac{1}{T_{\varphi 2}}}{\frac{1}{T_{\varphi 2}}} 100 \% \text{ и } \delta f = \frac{\sqrt{\frac{g}{L_{1i}}} - \sqrt{\frac{g}{L_2}}}{\sqrt{\frac{g}{L_2}}} 100 \% \text{ для различных жесткостей}$$

основания; при малой жесткости синхронизация практически полная, с ростом расстройки и жесткости пружины основания синхронизация ухудшается.

Результаты численного эксперимента можно усилить, если преобразовать систему уравнений (13) к безразмерному виду. Тогда появляются безразмерные комплексы, критерии подобия, в самой структуре которых заложена сущность физических процессов, происходящих в рассматриваемом устройстве. Вводя безразмерное время $\tau = \omega t$ получаем систему (14)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_1}{d\tau^2} &= -(Sh_1)^2 \sin(\varphi_1) - \bar{K}_{M\varphi 1} \frac{d\varphi_1}{d\tau} \\ &\quad + \bar{x} \cos(\varphi_1) \\ \frac{d^2 \varphi_2}{d\tau^2} &= -(Sh_2)^2 \sin(\varphi_2) - \\ \bar{K}_{M\varphi 2} \frac{d\varphi_2}{d\tau} &+ \bar{x} \cos(\varphi_2) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2} &= -\bar{x} - 2\xi \frac{d\bar{x}}{d\tau} + \bar{m}_1 \left(\frac{d\varphi_1}{d\tau}\right)^2 \\ &\quad + \bar{m}_{11} \cos(\varphi_1) \\ &\quad + \bar{m}_2 \bar{L}_{21} \left(\frac{d\varphi_2}{d\tau}\right)^2 \\ &\quad + \bar{m}_{22} \cos(\varphi_2) \end{aligned}$$

где $Sh_{1,2} = \sqrt{\frac{M_x g}{c_x L_{1,2}}}$ – отношения характерных времен, числа Струхали маятников; $\bar{K}_{M\varphi 12} =$

$\frac{K_{M\varphi 12}}{m_{1,2} L_{1,2}^2 \omega}$ – безразмерные коэффициенты вязкого трения маятников, $\xi = \frac{k_{vx}}{2\sqrt{M_x/c_x}}$ – коэффициент вязкого трения платформы; $\bar{m}_{12} = \frac{m_{1,2}}{M_x}$; $\bar{m}_{11} = \frac{m_1 g}{M_x L_1^2 \omega}$ и $\bar{m}_{22} = \frac{m_2 g}{M_x L_2^2 \omega}$ – относительные массы маятников; $\bar{L}_{21} = \frac{L_2}{L_1}$ – относительная длина маятников (15).

Число Струхали имеет глубокий физический смысл, чем он больше (чем меньше жесткость балки), тем больше связность маятников и выше эффективность синхронизации (см. рис.14); точность хода часов будет выполняться лишь при значении числа Струхали $Sh = 1$.

4 Заключение

Выводы по результатам исследования маятника с качающимся привесом (это вспомогательная задача, предназначенная для отработки модели передачи вибрационного движения от основания к маятнику, но, вместе с тем, она имеет самостоятельное значение):

- определяющим параметром является приведенная частота $\bar{\omega} = \frac{\omega A}{kL}$, при малых частотах $\bar{\omega} \ll 1$ результаты численного решения полностью совпадают с известным аналитическим решением линейной задачи;
- с ростом частоты период колебаний растет: сначала – медленно, а с приближением к $\bar{\omega} = 2$ – катастрофически, достигая значения $\bar{T} = T/T_{лин} \approx 2,5$ и далее не изменяется; форма колебаний маятника становится квазигармонической, а амплитуда (вернее полуразмах колебаний) постоянно нарастает, достигая значения π и далее не изменяется;
- при дальнейшем увеличении относительной частоты маятник начинает вращаться.

По результатам численного исследования синхронизации маятников (и часов), подвешенных на упругой платформе, получены следующие результаты:

- маятники даже при относительно большой погрешности изготовления

$$\delta L = \frac{L_1 - L_2}{L_1} 100 = 17,355\%$$

колеблются почти одинаково: погрешность амплитуд составляет $\delta\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1} = 9,224\%$, частоты же колебаний, что значительно важнее, практически совпадают, относительная разность периодов составляет всего $\delta T = 0,696\%$, для часов погрешность еще меньше.

- фактором, определяющим взаимную синхронизацию маятников, является число

$$\text{Струхала } Sh = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{c_x L}{M_x g}}$$

чем больше число Струхала (жесткость платформы – меньше), тем выше эффективность синхронизации;

- платформа при выбранных параметрах колеблется с частотой близкой к собственной;

- периоды колебаний маятников примерно равны периодам платформы (платформа «навязывает» свою частоту и маятники как бы забывают собственную частоту), с ростом жесткости платформы c_x (и числа Струхала) периоды также уменьшаются, точное равенство периодов платформы и маятников выполняется в случае, когда $Sh=1$;

- с увеличением расстройки частот маятников погрешность синхронизации увеличивается, а с ростом числа Струхала – уменьшается.

Завершая статью еще раз отметим, что все выводы о синхронизации относятся к принятой расчетной схеме, при иной идеализации такого довольно сложного технического объекта могут получиться соответственно иные результаты.

Список использованных источников

[1] Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное явление. М: Техносфера, 2003. – 496 с.

[2] Блехман И. И., Синхронизация в природе и технике. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 352 с.

[3] Канунников А. Ю., Лампер Р. Е., Синхронизация хода маятниковых часов, подвешенных на упругой балке.

[4] Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Регулярные и хаотические колебания. Синхронизация и влияние флуктуаций: Учебник-

монография / В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова – Долгопрудный: Издательский Дом «Инте-лект», 2009, - 312 с.

[5] Теоретическая механика в решениях задач из сборника И. В. Мещерского: Динамика материальной точки: Учебное пособие / Под ред. Г. М. Розенבלата. Изд.3-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», - 312 с.

SYNCHRONIZATION OF PENDULUMS (NUMERICAL STUDY)

Robert A. Sunarchin

Peter the Great St.Petersburg
Polytechnic University
29, Polytechnicheskaya,
St.Petersburg, Russian Federation
195251

sunar1939@mail.ru

Pavel V. Petrov

Ufa state aviation University
technical University, Karl-Marx, 12
Ufa, Republic of Bashkortostan,
Russian Federation
450000

pvl.petrov@mail.ru

This paper presents the results of a numerical study of synchronization of pendulums, chronometers, and mechanical clocks suspended from a common movable beam. An auxiliary problem is considered about the oscillations of a pendulum with a swinging weight, then the mutual synchronization of free vibrations of two and four pendulums (and pendulums with the supply of a moment pulse-clock) on a common movable spring-loaded beam. It is shown that in the considered simplest configuration, mutual synchronization (equality of frequencies or oscillation periods) is performed with high efficiency. The frequency of synchronized oscillations of the pendulums is close to the frequency of vibrations of the platform in a wide range of changes in its rigidity. The degree of connectivity of pendulums and synchronization of their oscillations is determined by the Strouhal number. Synchronization of clocks does not guarantee the accuracy of their movement, which is achieved only when the Strouhal number is equal to one.

Key words: Numerical methods; auto-oscillation; nonlinear model; dry friction force; synchronization

References

- [1] Pikovsky A., Rosenblum M., Kurts Yu. Synchronization: a Fundamental phenomenon. M: Technosphere, 2003. - 496 p.
- [2] Blechman I. I., Synchronization in nature and technology. - Moscow: Nauka. Home edition of physical and mathematical literature, 1981. - 352 p .
- [3] Kanunnikov A. Yu., Lamper R. E., Synchronization of the pendulum clock suspended on an elastic beam.
- [4] Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Vadivasova T. E., Regular and chaotic oscillations. Synchronization and influence of fluctuations: Textbook-monograph / V. S. Anishchenko, V. V. Astakhov, T. E. Vadivasova-Dolgoprudny: Inte-lect publishing House, 2009, 312 p.
- [5] Theoretical mechanics in problem solutions from the collection of I. V. Meshchersky: Dy-namics of a material point: Textbook\ Ed. by G. M. Rosenbla-TA. Ed. 3-e. - M.: Book house "LIBRO-COM", - 312 p.