



# ДИНАМИКА И ВИБРОАКУСТИКА

Выпуск №1, 2020

noise  
optimization acoustics  
robotics control systems  
pneumatics fluid power  
hydraulics vehicles efficiency  
transmissions mechatronics  
pulsation automation vibration  
CAD/CAE aerospace  
modeling

published by  
Samara University

<http://journals.ssau.ru/index.php/dynvibro/index>

**Главный редактор**

**Шахматов Е.В.** – д.т.н., профессор, Самарский университет (г. Самара, РФ).

**Заместители главного редактора:**

**Ермаков А.И.** – д.т.н., профессор, Самарский университет (г. Самара, РФ);

**Прокофьев А.Б.** – д.т.н., доцент, Самарский университет (г. Самара, РФ);

**Хейкки Х.** – профессор, руководитель лаборатории интеллектуальных машин, Технологический университет г. Лаппеенранта (г. Лаппеенранта, Финляндия).

**Технический редактор**

**Галкина Н.В.** – доцент, Самарский университет (г. Самара, РФ).

**Ответственный секретарь**

**Галкина Н.В.** – доцент, Самарский университет (г. Самара, РФ).

**Российские члены редакционной коллегии:**

**Балякин В.Б.** – д.т.н., профессор, Самарский университет (г. Самара, РФ);

**Берестовицкий Э.Г.** – д.т.н., главный акустик НПО «Аврора» (г. Санкт-Петербург, РФ);

**Гимадиев А. Г.** – д.т.н., профессор, Самарский университет (г. Самара, РФ);

**Жернаков В.С.** – д.т.н., профессор, Уфимский государственный авиационный технический университет (г. Уфа, РФ);

**Завершинский И.П.** – д.ф.-м.н., профессор, Самарский университет (г. Самара, РФ);

**Иголкин А.А.** – д.т.н., доцент, Самарский университет (г. Самара, РФ);

**Крючков А.Н.** – д.т.н., профессор, Самарский университет (г. Самара, РФ);

**Майзель А.Б.** – д.т.н., профессор, Санкт-Петербургский государственный университет кино и телевидения (г. Санкт-Петербург, РФ);

**Макарьянц Г.М.** – д.т.н., доцент, Самарский университет (г. Самара, РФ);

**Матвеев С.Г.** – к.т.н., доцент, Самарский университет (г. Самара, РФ);

**Паровой Ф.В.** – к.т.н., доцент, Самарский университет (г. Самара, РФ);

**Равикович Ю.А.** – д.т.н., профессор, Московский авиационный институт (г. Москва, РФ);

**Свербилов В.Я.** – к.т.н., доцент, Самарский университет (г. Самара, РФ);

**Фалалеев С.В.** – д.т.н., профессор, Самарский университет (г. Самара, РФ);

**Фесина М.И.** – к.т.н., доцент, Тольяттинский государственный университет (г. Тольятти, РФ);

**Хаймович А.И.** – д.т.н., доцент, Самарский университет (г. Самара, РФ).

**Иностранные члены редакционной коллегии:**

**Вакка А.** – профессор, исследовательский центр гидравлических систем университета Пурдью (г. Вест-Лафайетт, штат Индиана, США);

**Джонстон Д.Н.** – профессор, университет (г. Бат, Великобритания);

**Круз П.** – профессор, руководитель отдела пневмогидравлических и мехатронных систем, университет (г. Линчёпинг, Швеция);

**Линияма М.** – профессор технологического университета (г. Тампере, Финляндия);

**Рафиков М.** – профессор, федеральный университет АВС (г. Сан-Паоло, Бразилия);

**Стелсон К.** – профессор, университет Миннесоты (США);

**Стричек Я.** – профессор, Вроцлавский технологический университет (г. Вроцлав, Польша);

**Шайдл Р.** – профессор, университет Йохана Кеплера (г. Линц, Австрия).

**Editor-in-Chief**

**E.V. Shakhmatov** – Doctor of Science (Eng.), Prof. (Samara University, Samara, Russian Federation).

**A.I. Ermakov** – Doctor of Science (Eng.), Prof. (Samara University, Samara, Russian Federation);

**A.B. Prokofyev** – Doctor of Science (Eng.), Associate Professor (Samara University, Samara, Russian Federation);

**H. Handroos** – Prof., Head of the Laboratory of Smart Machines, Lappeenranta University of Technology (Lappeenranta, Finland).

**Technical Editor:**

**N.V. Galkina** – associate professor (Samara University, Samara, Russian Federation).

**Executive Editor:**

**N.V. Galkina** – associate professor (Samara University, Samara, Russian Federation).

**Editorial board Russian members:**

**V.B. Balyakin** – Doctor of Science (Eng.), Prof. (Samara University, Samara, Russian Federation);

**E.G. Berestovitsky** – Doctor of Science (Eng.), Aurora Scientific and Production Association JSC chief acoustician (St. Petersburg, Russian Federation);

**A.G. Gimadiev** – Doctor of Science (Eng.), Prof. (Samara University, Samara, Russian Federation);

**V.S. ZHernakov** – Doctor of Science (Eng.), Prof. (Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russian Federation);

**I.P. Zavershinsky** – Doctor of Science (Phys.-Math.), Prof. (Samara University, Samara, Russian Federation);

**A.A. Igolkin** – Doctor of Science (Eng.), Associate Professor (Samara University, Samara, Russian Federation);

**A.N. Kryuchkov** – Doctor of Science (Eng.), Prof. (Samara University, Samara, Russian Federation);

**A.B. Meisel** – Doctor of Science (Eng.), Prof. (St. Petersburg State University of Film and Television, St. Petersburg, Russian Federation);

**G.M. Makaryants** – Doctor of Science (Eng.), Associate Professor (Samara University, Samara, Russian Federation);

**S.G. Matveev** – Candidate of Science (Eng.), Associate Professor (Samara University, Samara, Russian Federation);

**F.V. Parovay** – Candidate of Science (Eng.), Associate Professor (Samara University, Samara, Russian Federation);

**I.U.A. Ravikovich** – Doctor of Science (Eng.), Prof. (MAI, Moskva, Russian Federation);

**V.Ya. Sverbilov** – Candidate of Science (Eng.), Associate Professor (Samara University, Samara, Russian Federation);

**S.V. Falaleev** – Doctor of Science (Eng.), Prof. (Samara University, Samara, Russian Federation);

**M.I. Fesina** – Candidate of Science (Eng.), Associate Professor (Togliatti State University, Tolyatti, Russian Federation);

**A.I. Khaimovich** – Doctor of Science (Eng.), Associate Professor (Samara University, Samara, Russian Federation).

**Editorial office foreign members:**

**A.Vacca** – Professor (Purdue University, West Lafayette, Indiana, USA);

**D.N. Johnston** – Professor (University of Bath, Bath, United Kingdom);

**P.Cruz** – Professor, Head of the Pneumatichydraulic and Mechatronic Systems Department (Linköping University, Linköping, Sweden);

**M. Liniyama** – Professor (Tampere University of Technology, Tampere, Finland);

**H. Myurenhof** – Professor (RWTH Aachen University, Aachen, Germany);

**M. Rafikov** – Professor (Universidade Federal do ABC (UFABC), Sao Paulo, Brazil);

**K. Stelson** – Professor (University of Minnesota, Minneapolis and St. Paul, Minnesota, United States).

**Ya.Strichek** – Professor (The University of Wrocław (UWr), Wrocław, Poland);

**R. Shaydl** – Professor (Johannes Kepler University, Linz, Austria).

## ЦЕЛИ И ТЕМАТИКИ ЖУРНАЛА

**Журнал «Динамика и виброакустика» публикует** теоретические и прикладные оригинальные научно-исследовательские работы в области, обусловленной названием журнала, а также в областях, смежных с ним. Все работы проходят предварительное рецензирование.

**Целью** журнала является стимулирование дискуссий, формирование научно-информационной среды и распространение идей в области динамики и виброакустики различных систем.

**Тематика** работ, публикуемых в нашем журнале, посвящена:

- **системам управления:** адаптивному и оптимальному управлению; автоматизированному управлению; энергетическим системам и управлению ими; гидравлическим системам управления; интеллектуальному управлению; управлению движением;

- **вибрации:** вибрации систем с постоянными и дискретными параметрами; линейным и нелинейным вибрациям; модальному анализу; динамике конструкций; подавлению вибрации; пассивным и активным методам демпфирования;

- **акустике:** акустической эмиссии; борьбе с шумом и пульсациями рабочей среды;

- **пульсациям давления:** вопросам взаимодействия рабочей среды и твёрдых границ; течениям, вызывающих повышенный уровень шума и вибрации; течению в каналах и трубах; течению в биологических системах; струям; мультифазному течению; гидродинамике надводных и подводных аппаратов; турбулентности и волнам; динамике;

- **динамике машин:** поведению систем; долговечности; надёжности; процессам проектирования и изготовления; мехатронным системам; энергетическим установкам; робототехническим системам; транспортным средствам.

## PURPOSES AND SCOPE

**The Journal of Dynamics and Vibroacoustics publishes** peer-reviewed theoretical and applied original scholarly articles, Research Papers, Technical Briefs, and feature articles in the traditional areas implied by its name, as well as papers in interdisciplinary areas.

**The purpose** of our journal is to disseminate information in dynamics and vibroacoustics of interest to researchers and designers in engineering, medicine, computer science, chemistry and others. The majority of papers present original analytical, numerical or experimental results and physical interpretation of lasting scientific value. Other papers are devoted to the review of recent contributions to a topic, or the description of the methodology and/or the physical significance of an area that has recently matured.

**Area of interests** include but is not limited to:

- **control systems:** adaptive and optimal control; computer control; distributed parameter systems and control; energy systems and control; fluid control systems; intelligent control; motion controls;

- **vibration:** vibration of continuous and lumped parameter systems; linear and non-linear vibrations; modal analysis; structural dynamics; vibration suppression and isolation; passive and active damping;

- **acoustics:** acoustic emission; noise control; structural acoustics;

- **pressure pulsation:** fluid-structure interaction; flow induced noise and vibration; bubbly flows; cavitations; compressible flows; duct and pipe flows; flows in biological systems; fluid-structure interaction; jets; multiphase flows; naval hydrodynamics; turbulence and wakes; instrumentation and components;

- **dynamics:** machinery dynamics; rotor dynamics; combined and coupled behavior; durability; reliability; system design and manufacturing; optimization; manufacturing technology; mechatronics; power systems; production systems; robotics, transportation systems.

**СОДЕРЖАНИЕ**

АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЗУБЧАТОЙ МУФТЕ ТРАНСМИССИИ  
ХВОСТОВОГО ВИНТА ВЕРТОЛЕТА

*И.В. Колесников, П.А. Коропец* 6

НОВЫЕ ПОДХОДЫ В ВИБРОДИАГНОСТИКЕ МНОГОВАЛЬНЫХ ЗУБЧАТЫХ  
ПРИВОДОВ

*Д.В. Омесь, А.В. Драган* 14

ВЛИЯНИЕ ГИДРОДРОБЕСТРУЙНОЙ ОБРАБОТКИ НА ПРЕДЕЛ ВЫНОСЛИВОСТИ  
ОБРАЗЦОВ С НАДРЕЗОМ ПРИ ИЗГИБЕ И РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

*В.Ф. Павлов, В.А. Кирпичёв, В.С. Вакулюк, В.П. Сазанов, П.А. Шляпников* 25

АВТОКОЛЕБАНИЯ МАЯТНИКА ФРУДА (ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ)

*Р.А. Сунарчин, П.В. Петров* 35

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ МАГНИТО-РЕОЛОГИЧЕСКОГО ЭЛАСТОМЕРА  
ДЛЯ ВИБРОИЗОЛЯЦИИ В ВАКУУМЕ

*А.М. Базиненков, Д.А. Иванова, И.А. Ефимов, А.П. Ротарь* 43

Колесников И.В.,  
Коропец П.А.

Ростовский государственный  
университет путей сообщения

2, пл. Ростовского Стрелкового Полка  
Народного Ополчения,  
г. Ростов-на-Дону, 344038  
Российская Федерация,

pkoropets@gmail.com

## АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЗУБЧАТОЙ МУФТЕ ТРАНСМИССИИ ХВОСТОВОГО ВИНТА ВЕРТОЛЕТА

*Эксплуатация вертолетов Ми-26 показала, что наработка на забраковку шлицевых зубчатых муфт трансмиссии хвостового винта может отличаться примерно в 30 раз. Этот факт является поводом для поиска динамических процессов, нарушающих стационарность режимов нагружения муфт трансмиссии. На основании анализа кинематики и динамики муфты в данной работе показано, что при скольжении в парах трения «зуб-шлиц» могут развиваться фрикционные автоколебания, приводящие к дополнительным динамическим нагрузкам в элементах трансмиссии и, как следствие, снижению рабочего ресурса муфт. Вид автоколебаний, их параметры (частота, амплитуда), а также – устойчивость трансмиссии по отношению к фрикционным автоколебаниям зависят от трибологических характеристик контакта «зуб-шлиц», которые требуют дополнительных экспериментальных исследований. Результаты данной работы могут быть полезны при планировании натурных испытаний и обработке полученных данных.*

**Ключевые слова:** кинематика; динамика; вращающий момент; трение; скольжение; фрикционные автоколебания; устойчивость

### 1 Введение

Трансмиссия хвостового винта большинства вертолетов состоит из отдельных валов, последовательно соединенных зубчатыми шлицевыми муфтами, и двух промежуточных редукторов [1]. Многолетний опыт эксплуатации вертолета МИ-26 показал, что наработка шлицевых зубчатых муфт с начала эксплуатации до забраковки (по боковому зазору, выработке зубьев) изменяется в очень широких пределах – от 111 до 2985 часов. Отсюда следует, что отказ каждой из муфт возможен в непредсказуемый момент их эксплуатации.

Безопасная эксплуатация вертолета достигается регулярным контролем состояния муфт – каждые 100 часов налета и не менее 1 раза в месяц [2].

Одним из наиболее эффективных средств неразрушающего контроля и мониторинга является вибродиагностика – это определение состояния системы по

возникающим в ней шумам и вибросигналам [3, 4].

Для формирования информативных признаков состояния муфты и достоверной вибродиагностики трансмиссии необходимо рассмотреть особенности конструкции и динамики зубчатой муфты.

Сам факт 30 кратного различия в моторесурсе узла свидетельствует о том, что либо изначально широкий разброс имеют его технические характеристики, или же режимы работы муфт трансмиссии не являются стационарными, что наиболее вероятно.

Цель исследования – на основании анализа кинематики и динамики зубчатой муфты оценить возможность развития процессов, возникающих случайно, но оказывающих доминирующее влияние на нагрузки и, как следствие, – на моторесурс муфт.

### 2 Кинематика и динамика муфты

Конструкция шлицевой зубчатой муфты как элемента трансмиссии хвостового винта вертолета Ми-26 показана на рисунке 1.

Кинематическая схема зубчатой муфты показана на рисунке 2.

Угловая расцентровка означает, что ось ведущего вала муфты отклонена от направления ведомого вала на малый угол. Это приводит к тому, что плоскость вращения зубьев (ведущий вал) и плоскость вращения шлицев (ведомый вал) не совпадают и пересекаются по отрезку, проходящему через точку пересечения осей вращения  $O$ .

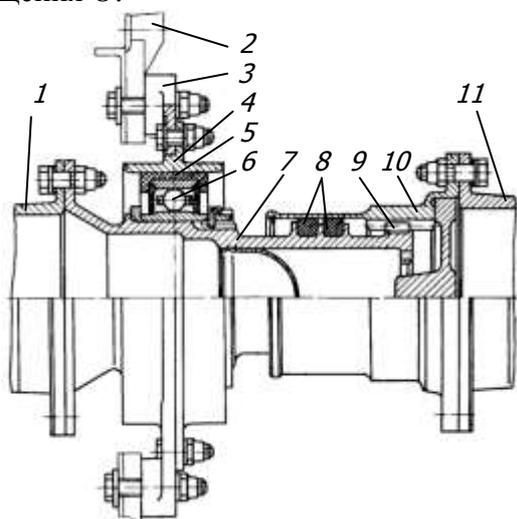


Рисунок 1. Конструкция зубчатой муфты: 1 – фланец ведущего вала, 2 – шпангоут, 3 – переходной фланец, 4 – опора, 5 – резиновая опора, 6 – шарикоподшипник, 7 – наконечник, 8 – резиновые уплотнения, 9 – шлицевое соединение, 10 – стакан, 11 – фланец ведомого вала

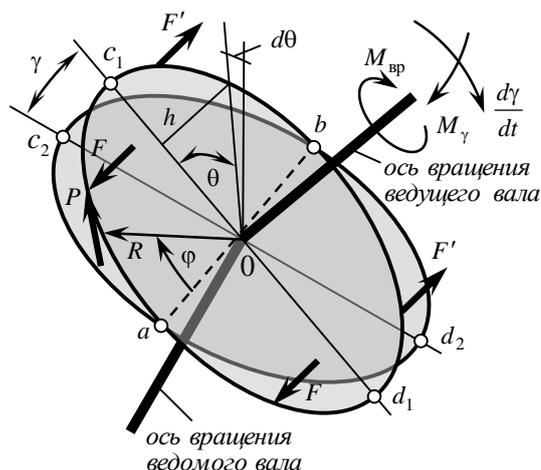


Рисунок 2. Кинематическая схема зубчатой муфты с угловой расцентровкой осей вращения

При вращении происходит взаимное смещение (скольжение) зубьев и шлицев, достигающее наибольшей величины между точками  $c_1$  и  $c_2$ , максимально удаленных от отрезка  $[ab]$ . В силу малости угла  $\gamma$  (у зубчатых муфт он обычно не превышает  $1,5^\circ$ ) можно принять  $\sin \gamma = \gamma$ . Длина пути скольжения будет  $s = R\gamma \sin \phi$ , где  $R$  - радиус делительной окружности зубчатой муфты.

Если передача вращающего момента  $M_{вр}$  осуществляется только одной парой «зуб-шлиц», то в точке их контакта будет создаваться сила  $P = \frac{M_{вр}}{R}$ , направленная по касательной к делительной окружности зубьев. Скольжение зубьев и шлицев создается в пятне контакта касательную силу трения  $F = k \frac{P}{\cos 20^\circ}$ , где  $k$  - коэффициент трения, направленную против скольжения контактирующих тел, т.е. перпендикулярно плоскости вращения зубьев. Коэффициент  $1/\cos 20^\circ$  отражает тот факт, что контактирующие поверхности зубьев и шлицев (в силу их эвольвентного профиля) в полюсе зацепления наклонены на угол  $20^\circ$  по отношению к радиусу делительной окружности.

Если предположить, что зубьев

бесконечно много, то передаваемую окружную силу можно распределить по всей длине окружности зубьев, сформировав «удельную» силу  $p = \frac{P}{2\pi R}$  в каждой точке окружности. Тогда в каждой точке окружности будет создаваться «удельная» сила  $q = kp$ , распределенная по всей окружности, направленная противоположно скольжению и поэтому – перпендикулярно плоскости вращения зубьев. Такая распределенная нагрузка создает вокруг отрезка  $[c_1 d_1]$  момент  $M_\gamma$ , который может быть вычислен из выражения:

$$M_\gamma = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} hqR d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} qR^2 \sin \theta d\theta =$$

$$= 4k \frac{M_{\text{вр}} R^2}{2\pi R^2 \cos 20^\circ} = \frac{2kM_{\text{вр}}}{\pi \cos 20^\circ}.$$

В полученном выражении принято «кулоново» трение, которое не зависит от величины скорости относительного скольжения, а зависит только от ее направления. Поэтому момент  $M_\gamma$ , вызванный изломом осей вращения, пропорционален коэффициенту трения  $k$ , моменту вращения  $M_{\text{вр}}$ , и не зависит от угла излома осей  $\gamma$ .

Как следует из рисунка 2, направление момента  $M_\gamma$  определяется направлением сил  $F$  и  $F'$ , которые направлены против скорости относительного скольжения зубьев и шлицев. Таким образом, вектор момента направлен по отрезку  $[c_1 d_1]$  от точки  $c_1$  к точке  $d_1$ .

При вращении муфты в направлении, указанном для угла  $\phi = \omega t$ , где  $\omega$  угловая скорость вращения валов. Скорость относительного скольжения зубьев будет  $\dot{s} = \omega \gamma R \cos(\omega t)$ . В точках  $a$  и  $b$  скорость скольжения достигает максимума и равна  $\dot{s}^{\text{max}} = \omega \gamma R$ . В точках  $c_1$  и  $c_2$  (а также в точках  $d_1$  и  $d_2$ ) происходит остановка и смена направления скольжения.

Если зависимость силы трения от скорости скольжения  $F_{\text{тр}}(\dot{s})$  отличается от «кулонова трения», то величина момента  $M_\gamma$  будет зависеть от угла поворота ведущего вала  $\phi$  и от угла излома осей  $\gamma$ , так как от угла излома зависит амплитуда скоростей относительного скольжения в парах «зуб-шлиц». В этом случае для одной пары «зуб-шлиц» элементарный момент  $M_{\gamma 1}$  в пределах одного оборота определяется из выражения:

$$M_{\gamma 1}(t) = |F_{\text{тр}}(\dot{s}) \cdot R \cdot \cos(\omega t)|.$$

Характеристика трения в паре «зуб-шлиц»  $F_{\text{тр}}(\dot{s})$  схематично показана на рисунке 3.

Из выше приведенных выражений следует, что скорость скольжения  $\dot{s}$  изменяется по гармоническому закону и неизбежно проходит точки остановки и участки характеристики сцепления с угловым коэффициентом  $\beta$  – рисунок 3.

Если пара «зуб-шлиц» содержит осцилляторы, то в муфте возможно развитие фрикционных автоколебаний с частотами на порядок выше оборотной частот вращения валов муфты.

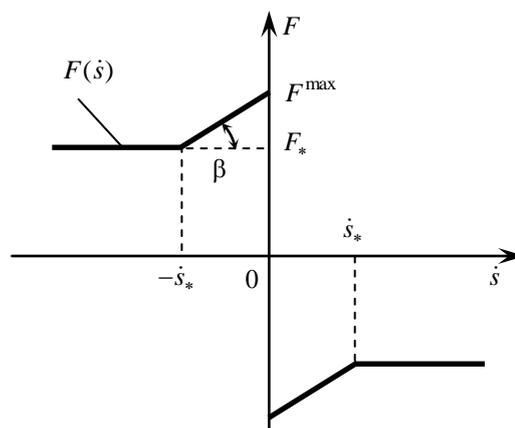


Рисунок 3. Зависимость силы трения от скорости относительного скольжения

Условия развития автоколебаний определяются параметрами осцилляторов а также – параметрами характеристики трения:  $F^{\text{max}}$ ,  $\beta$ ,  $\dot{s}_*$  – рисунок 3, которые зависят от материала стакана и муфты, вида и режима термообработки, физических

свойств нанесенных покрытий и применяемой смазки.

Определение этих параметров требует дополнительных экспериментальных исследований. Наиболее важно ответить на вопрос: «возможно ли методами вибродиагностики идентифицировать и различать наносимые покрытия и оценивать устойчивость трибологического контакта по отношению к фрикционным автоколебаниям?».

В работах А.Ю. Ишлинского и И.В. Крагельского [5] и более современных исследователей, например, В.С. Метрикина [6] рассматриваются условия развития и параметры релаксационных фрикционных автоколебаний в высоконагруженных парах трения.

В практических целях важно знать, какого типа автоколебания (релаксационные или квазигармонические) могут развиваться в парах «зуб-шлиц», и как на эти динамические характеристики могут влиять различные модификации поверхностей трения.

Автоколебания проявляются в дополнительной вибрационной активности, которая будет определенным образом сориентирована по отношению к плоскости излома осей вращения. Поэтому для повышения качества и достоверности вибродиагностики необходимо устанавливать на каждую муфту два датчика-акселерометра с взаимно перпендикулярно ориентированными осями или один двухосевой акселерометр.

Сымитировать процесс развития автоколебаний в паре «зуб-шлиц» можно на модели простейшего осциллятора – рисунок 4, содержащего пару трения с характеристикой, показанной на рисунке 3.

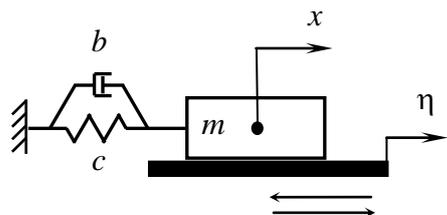


Рисунок 4. Модель осциллятора с трением

Движение модели (рисунок 4) описывается дифференциальным уравнением:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F(\dot{x}_{\text{ск}}),$$

где  $\dot{x}_{\text{ск}} = \dot{x} - \dot{\eta}$  - скорость скольжения массы;

$x = x(t)$  - обобщенная координата массы;

$\eta = \eta(t) = A \sin(\omega_1 t)$  - координата

кинематического возмущения;

$\dot{\eta}(t) = \omega_1 A \cos(\omega_1 t)$  - скорость возмущения;

$m, c, b$  - соответственно инерционные, упругие и диссипативные параметры модели.

В данном случае для соответствия процессов в математической модели простейшего осциллятора процессам в реальной муфте необходимо, чтобы частота внешнего возмущения  $\omega_1$  была на 1-2 порядка меньше собственной частоты колебаний модели  $\Omega$ :

$$\omega_1 \ll \Omega, \text{ где } \Omega = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Условием возбуждения автоколебаний является превышение мощности, подводимой в систему в процессе колебаний  $E^+$ , над рассеиваемой мощностью  $E^-$  ( $E^- < E^+$ ), или в соответствие с работой [7]  $b < \beta$ , где  $\beta$  - крутизна (жесткость) наклоненного участка характеристики трения – рисунок 3.

Параметры эквивалентного простейшего осциллятора еще предстоит уточнить экспериментально. Но в данном случае важен не количественный, а качественный результат.

Результаты расчета для одной пары «зуб-шлиц» показаны на рисунках 5 и 6.

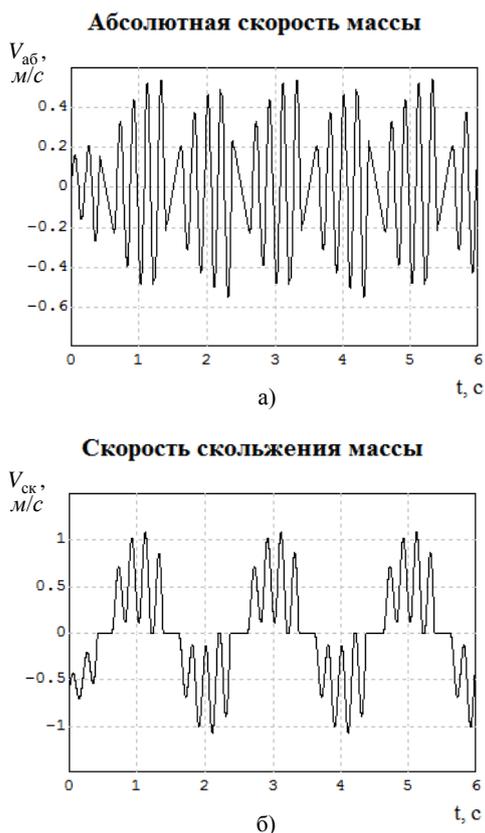


Рисунок 5 Кинематические показатели модели

При моделировании приняты следующие значения параметров:  $c = 1000 \text{ Н/м}$ ,  $m = 1 \text{ кг}$ ,  $b = 2 \text{ Нс/м}$ . Принятый коэффициент демпфирования  $b = 0,0316b_{кр}$ , где  $b_{кр} = 2\sqrt{cm}$ . Примерно такого порядка демпфирование соответствует рассеиванию энергии в сталях при колебаниях – конструкционное демпфирование в паре «зуб-шлиц» [8].

Моделирование выполнено в замедленном в 100 раз масштабе времени:  $M_t = 100$ .

Частота внешнего возмущения задана близкой к оборотной номинальной частоте муфты, которая во временном масштабе 1:100 принята  $f_n = 0,5 \text{ Гц} = 3,14 \text{ с}^{-1}$ . При таких параметрах модельная собственная частота равна:

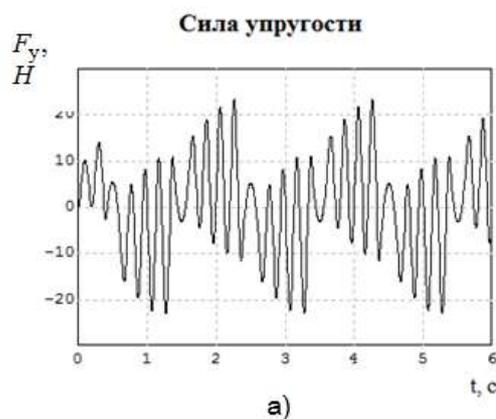
$$\Omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{1}} = 31,62 \text{ с}^{-1} = 5,03 \text{ Гц}.$$

Характеристика  $F(\dot{s}_{ск})$  имеет параметры:

$F^{max} = 10 \text{ Н}$ ;  $F_* = 5 \text{ Н}$ ;  $\dot{s}_* = 0.5 \text{ м/с}$ . При таких параметрах  $\beta = 10 \text{ Нс/м}$ . Следовательно, выполняется условие  $b < \beta$ , и в системе развиваются фрикционные автоколебания с частотой  $\Omega_f = M_t \cdot \Omega = 503 \text{ Гц}$ .

Сопоставляя рисунки 5а и 5б, можно утверждать, с начала каждого полупериода кинематического возмущения  $\eta(t)$  в системе происходит развитие автоколебаний с собственной частотой  $\Omega$  и с нарастающей амплитудой, которая резко уменьшается к завершению полупериода. Это объясняется тем, что в начале и в конце каждого полупериода равновесная скорость, определяемая внешним возмущением, равна нулю. В окрестности нуля характеристика трения имеет разрыв первого рода («ступеньку»), который является фактором жесткого ограничения амплитуды автоколебаний.

Результирующая амплитуда скорости скольжения  $V_{ск} = \dot{x}_{ск}$  примерно в 2 раза больше абсолютной скорости массы  $V_{аб} = \dot{x}$ , так как скорость скольжения складывается из колебательной составляющей абсолютной скорости массы и скорости кинематического возмущения  $\dot{\eta}(t)$  – см. выше, что хорошо просматривается на рисунке 5б.



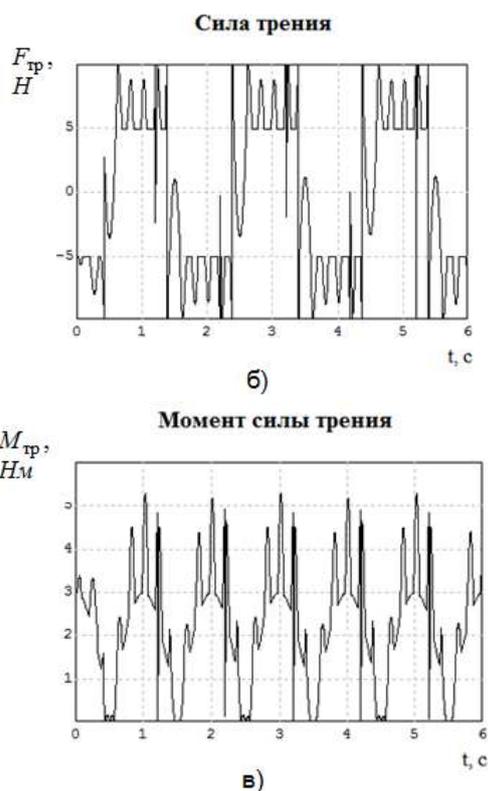


Рисунок 6. Динамические показатели модели

Отсюда следует практически важный вывод о том, что, чем больше амплитуда низкочастотного возмущения  $\eta(t)$ , тем больше амплитуда высокочастотных автоколебаний. Следовательно, амплитуда автоколебаний зависит от скорости возмущения  $\dot{\eta}(t)$ , а для муфты это означает – от угла излома осей вращения валов и их угловой скорости  $\omega$ .

Характер изменения упругих сил в пружине осциллятора (рисунок 6а) полностью повторяет характер абсолютной скорости массы. Для муфты эти силы эквивалентны тангенциальным упругим силам в контакте «зуб-шлиц».

Изменение во времени сил трения (рисунок 6б) зависит от вида характеристики трения  $F_{тр}(\dot{s})$ .

Момент от сил трения (рисунок 6в) ограничен синусоидальной огибающей, обусловленной изменением плеча силы трения от угла поворота валов.

Суммарный момент от всех пар «зуб-шлиц» определится как сумма всех 27-и

единичных моментов с учетом их относительного фазового сдвига.

Из этого следует, что если автоколебания возникают в нескольких из 27-и пар трения, то они могут порождать многочастотные (близкие по частотам) колебательные процессы.

Проявление таких колебаний в определенном частотном диапазоне может служить информативным диагностическим признаком тяжело нагруженного (критического) режима работы муфты.

### 3 Заключение

1. Кинематический анализ зубчатой муфты показал, что при наличии угловой расцентровки осей вращения ведущего и ведомого валов, в муфте возникает изгибающий момент, обусловленный силами трения в парах «зуб-шлиц» вращающейся муфты.

2. Методами математического моделирования показано, что если характеристика трения в парах «зуб-шлиц» отличается от «кулонова» трения, то муфте возможно развитие фрикционных автоколебаний.

3. Автоколебательный режим фрикционного взаимодействия принципиально отличается от взаимодействия без колебаний, и в первую очередь по своим энергетическим показателям, которые главным образом определяют интенсивность износа узла, содержащего пары трения.

4. Автоколебания являются причиной возможных бифуркаций [9] в основных эксплуатационных режимах, существенно затрудняющих прогнозирование состояния и остаточного ресурса узла.

5. Устойчивость динамической системы по отношению к автоколебаниям, а также характер автоколебаний зависит от трибологических параметров фрикционных пар, таких как зависимость силы трения от скорости относительного скольжения, инерционных, упругих и диссипативных характеристик материалов контактирующих

поверхностей.

6. Стабилизация динамических режимов системы, содержащей пары трения, может быть достигнута как путем модификации контактирующих поверхностей, так и за счет оптимального выбора смазки.

7. Исключение автоколебательных режимов в парах трения способствует увеличению ресурса деталей и узлов. Это позволяет устранить неопределенность в установлении гарантированного ресурса и снизить затраты на обслуживание узлов машин без ее потери надежности.

8. Полученные теоретические результаты следует учитывать при составлении программы и проведении экспериментальных исследований.

### Благодарности

Автор Колесников И.В. выражает благодарность за финансовую поддержку Федеральному агентству железнодорожного транспорта (протокол от 15.04.2020 № ВЧ-24).

### Список литературы

[1] Ми-26Т. Руководство по технической эксплуатации. Вертолет Ми-26Т стандартная спецификация (2000). Издательство ОАО «Роствертол», 2000, РТЭ 6 книг. – 342 с.

[2] Вертолет Ми-26Т. Регламент технического обслуживания. Ч.1. Планер, вертолетные системы, силовая установка. М.: МВЗ им. Миля, 1989. – 248 с.

[3] Голованов В.В. Бортовые системы ЦИАМ диагностики вертолетов [Электронный ресурс]. URL: <http://agnc.ru/publication/7804> (дата обращения: 12.08.2020).

[4] Колесников В.И., Коропец П.А., Синютин Е.С. Вибродиагностика зубчатых муфт трансмиссии вертолета // Изв. вузов. Авиационная техника. 2020. № 1. С. 9-14.

[5] Ишлинский А.Ю., Крагельский И.В. О скачках при трении // Журнал технической физики. 1944. Т. 14. Вып. 4/5. С. 276–282.

[6] Метрикин В.С., Нагаев Р.Ф., Степанова В.В. Периодические и стохастические автоколебания в системе с сухим трением наследственного типа // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 859–864.

[7] Коропец П.А. Метод оценки устойчивости упругих систем с малой диссипацией // Вестник РГУПС. Ростов н/Д. 2016. № 1. С. 32 – 41.

[8] Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). —М.: Машиностроение, 1981. – Т. 6. Защита от вибрации и ударов / Под ред. К. В. Фролова. 1981. – С. 129-141.

[9] Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной механики // М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 336 с.

**ANALYSIS OF DYNAMIC PROCESSES IN GEARE COUPLING OF HELICOPTER TAIL ROTOR TRANSMISSION**

**Kolesnikov I.V.,  
Koropets P.A.**

Rostov State Transport University  
2, Rostovskogo Strelkovogo Polka  
Narodnogo Opolcheniya Sq.,  
Rostov-on-Don, 344038  
Russian Federation,

pkoropets@gmail.com

*Abstract. The operation of the Mi-26 helicopters has shown that the operating time for rejection of splined gear couplings of the tail rotor transmission can differ by about 30 times. This fact is the reason for the search for dynamic processes that violate the stationary of the loading modes of the transmission couplings. Based on the analysis of the kinematics and dynamics of the clutch, it is shown in this work that when sliding in "tooth-spline" friction pairs, frictional self-oscillations can develop, leading to additional dynamic loads in the transmission elements and, as a consequence, a decrease in the working life of the clutches. The type of self-oscillations, their parameters (frequency, amplitude), as well as the stability of the transmission in relation to frictional self-oscillations depend on the tribological characteristics of the "tooth-slot" contact, which require additional experimental research. The results of this work can be useful in planning field tests and processing the data obtained.*

**Key words:** kinematics; dynamics; torque; friction; slip; frictional self-oscillations; stability

**Reference**

- [1] Mi-26T. Rukovodstvo po tekhnicheskoy ekspluatatsii. Vertolet Mi-26T standartnaya spetsifikatsiya (2000). Izdatel'stvo OAO «Rostvertol», 2000, RTE 6 knig. – 342 s. [Mi-26T. Technical operation manual. Helicopter Mi-26T standard specification (2000). Publishing house of JSC "Rostvertol", 2000, RTE 6 books. - 342 p.]
- [2] Vertolet Mi-26T. Reglament tekhnicheskogo obsluzhivaniya. CH.1. Planer, vertoletnyye sistemy, silovaya ustanovka. M.: MVZ im. M.L. Milya, 1989. – 248 s. [Helicopter Mi-26T. Maintenance schedule. Part 1. Glider, helicopter systems, power plant. M. : MVZ im. M.L. Mil, 1989. -- 248 p.]
- [3] Golovanov V.V. Bortovyye sistemy TSIAM diagnostiki vertoletov [Elektronnyy resurs]. URL: <http://agnc.ru/publication/7804> (data obrashcheniya: 12.08.2020). [CIAM onboard systems for diagnostics of helicopters [Electronic resource]. URL: <http://agnc.ru/publication/7804> (date of access: 12.08.2020)]
- [4] Kolesnikov V.I., Koropets P.A., Sinyutin Ye.S. Vibrodiagnostika zubchatykh muft trans-missii vertoleta // Izv. vuzov. Aviatsionnaya tekhnika. 2020. № 1. S. 9-14. [Vibration diagnostics of gear couplings of a helicopter transmission // Izv. vuzov. Aviation technology. 2020. No. 1. S. 9-14].
- [5] Ishlinskiy A.YU., Kragel'skiy I.V. O skachkakh pri trenii // Zhurnal tekhnicheskoy fiziki. 1944. T. 14. Vyp. 4/5. S. 276–282. [On jumps in friction // Journal of technical physics. 1944. T. 14. Iss. 4/5. S. 276–282].
- [6] Metrikin V.S., Nagayev R.F., Stepanova V.V. Periodicheskiye i stokhasticheskiye avtokolebaniya v sisteme s sukhim treniyem nasledstvennogo tipa // PMM. 1996. T. 60. Vyp. 5. S. 859–864. [Periodic and stochastic self-oscillations in a system with dry friction of hereditary type // Prikl. 1996. T. 60. 5.P. 859–864].
- [7] Koropets P.A. Metod otsenki ustoychivosti uprugikh sistem s maloy dissipatsiyey // Vestnik RGUPS. – Rostov n/D. – 2016. – № 1. – S. 32 – 41. [A method for assessing the stability of elastic systems with low dissipation. - Rostov n / a. - 2016. - No. 1. - P. 32 - 41].
- [8] Vibratsii v tekhnike: Spravochnik. V 6-ti t. / Red. sovet: V. N. Chelomey (pred.). – M.: Ma-shinostroyeniye, 1981. — T. 6. Zashchita ot vibratsii i udarov / Pod red. K. V. Frolova. 1981. – S. 129-141. [Vibrations in Engineering: A Handbook. In 6 volumes / Ed. advice: V.N. Chelomey (previous). - M.: Machine building, 1981. - T. 6. Protection from vibration and shock / Ed. K. V. Frolov. 1981. - S. 129-141].
- [9] Malinetskiy G.G., Potapov A.B. Sovremennyye problemy nelineynoy mekhaniki. – M.: Editorial URSS, 2000. – 336 s. [Modern problems of nonlinear mechanics. - M.: Editorial URSS, 2000.- 336 p].

**НОВЫЕ ПОДХОДЫ В ВИБРОДИАГНОСТИКЕ МНОГОВАЛЬНЫХ ЗУБЧАТЫХ ПРИВОДОВ****Д.В. Омель  
А.В. Драган**Брестский государственный  
технический университет  
Московская, 267  
г. Брест, 224017  
Республика Беларусь  
dimaomes@gmail.com

*Проводимые исследования направлены на разработку новых и усовершенствование существующих методов и средств анализа вибрационного сигнала для выявления локальных повреждений зубчатых колес многовальных приводов в период эксплуатации. С целью перехода от качественной оценки спектров к количественной предложена и экспериментально опробована новая методика расчета коэффициента модуляции вибрационного сигнала, учитывающая механизм формирования комбинационных частот. Также разработана методика конструирования и применения уникальных вейвлетов, адаптированных для анализа вибрации зубчатых передач.*

**Ключевые слова:** зубчатая передача, вибрация, диагностика, сигнал, спектр, модуляция, вейвлет, анализ

**1 Введение**

Анализ современных тенденций развития машиностроения показывает, что наиболее прогрессивным направлением обеспечения и повышения надежности и ресурса машин является организация их эксплуатации, обслуживания и ремонта по фактическому состоянию. Вибродиагностика зубчатых передач является наиболее перспективным направлением безразборного контроля и позволяет перейти к обслуживанию по текущему техническому состоянию.

Зубчатые передачи в процессе эксплуатации независимо от их технического состояния создают шум и вибрацию. Высокая информативность вибросигнала, генерируемого при работе трансмиссии, а также взаимосвязь между состоянием зубчатых колес и параметрами вибрации неоспорима. В настоящее время разработаны и применяются различные методы вибродиагностики, основанные на временном, частотном и время-частотном анализе сигнала вибрации. Многовальные

зубчатые приводы, имеющие три и более передачи, генерируют сложный нестационарный вибрационный сигнал, включающий большое число компонентов от различных источников. Производить диагностику, анализируя такой сигнал, становится значительно сложнее. Порой классические методы обработки и анализа вибросигналов не дают положительных результатов. Сложность обнаружения эксплуатационных дефектов на ранней стадии их развития обусловлена малой энергоемкостью вибрационных процессов, сопутствующих развитию этих дефектов. Поэтому выявление незначительных изменений вибрационного сигнала на фоне больших помех требует привлечения тонких методов анализа изменения структуры сигнала.

**2 Модуляция вибросигнала**

Эксплуатационные дефекты контактирующих поверхностей зубьев являются дополнительными возмущающими

факторами, которые приводят к изменению свойств вибрационного сигнала. Вибрацию зубчатой пары можно описать наличием характерных дискретных составляющих спектра и их соотношений, изменяющихся с развитием локальных дефектов зубчатых колес. Появление и развитие дефектов контактирующих поверхностей колес отражается как на частотах пересопряжения зубьев  $f_z = zf_0$  и их гармониках  $mf_z$ , так и на модуляционных частотах  $mf_z \pm kf_0$  в окрестности зубцовых гармоник, где  $m$  и  $k=1, 2, \dots$ ,  $f_0$  – частота вращения колеса,  $z$  – число зубьев колеса. Общее число различимых боковых гармоник  $k$  может колебаться в пределах от четырех до шести. Их амплитуды не всегда симметричны относительно зубцовой частоты.

Возникают вопросы: почему появляются гармоники с частотами  $mf_z$  кратными зубцовой и боковыми полосами  $kf_0$  в окрестности каждой из них, чем обусловлено количество боковых полос, что влияет на несимметричность верхних и нижних боковых полос. Для ответа на эти вопросы следует рассмотреть само явление модуляции и механизмы формирования модулированного сигнала. Наиболее развернуто явление модуляции рассматривается в теории передачи радиосигналов, когда несущий сигнал намеренно модулируется информационным сигналом для передачи на большие расстояния [1-3].

Сложный гармонический колебательный процесс в общем виде можно описать выражением [4, 5]:

$$a(t) = A(t) \cos(\omega(t)t + \varphi(t)) = A(t) \cos \psi(t) \quad (1)$$

где  $A$  – амплитуда;

$\omega$  – частота;

$\varphi$  – начальная фаза;

$\psi$  – полная фаза высокочастотного колебания.

Как видно в выражении (1), все параметры колебания могут изменяться во времени. В зависимости от того, какой из этих трех параметров периодически

изменяется, различают амплитудную, частотную и фазовую модуляцию, а также их сочетания. При модуляции следует различать модулируемый высокочастотный сигнал (несущий) с частотой  $\Omega$ , модулирующий низкочастотный сигнал  $\omega_0$  и модулированный сигнал, являющийся результатом модуляции. Согласно теории передачи сигналов, в качестве несущего может быть гармоническое колебание или периодическая последовательность импульсов. Рассмотрим подробнее второй случай, который приводит к импульсной модуляции.

В зависимости от модифицируемого параметра различают амплитудно-импульсную, фазоимпульсную, частотно-импульсную, а также широтно-импульсную модуляцию. Когда последовательность импульсов подвергается одному из видов модуляции, то формируются спектры, состоящие из семейства гармоник с частотами  $m\omega_0 \pm k\Omega$ , подобные спектрам вибрации зубчатых передач.

Для того чтобы раскрыть механизм формирования такого спектра, рассмотрим модель импульсной модуляции. Представим несущий сигнал в виде периодической последовательности импульсов с частотой  $\omega_0$ , которую можно записать выражением [3]:

$$A(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v\left(t - \frac{n}{\omega_0}\right) \quad (2)$$

где  $v(t)$  – форма импульса.

В [3] предложено аппроксимировать эту последовательность в ряд Фурье без учета формы импульса и начальной фазы:

$$A(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega_0 t \quad (3)$$

Чтобы модулировать такой сигнал модулирующей частотой  $\Omega$ , в выражение (3) под знак косинуса введем фазу модулированного сигнала  $\varphi(t) = m \sin \Omega t + \varphi_0$

и получим выражение, описывающее сигнал с частотно-импульсной модуляцией:

$$a(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + nm \sin \Omega t), \quad (4)$$

где  $m$  – индекс угловой модуляции [6].

Чтобы найти спектр такого сигнала, произведем следующие преобразования. Выражение (4) представим в следующем

$$a(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[ \begin{aligned} & J_{0n}(nm) \cos n\omega_0 t + \\ & + J_{1n}(nm) [\cos(n\omega_0 + \Omega)t - \cos(n\omega_0 - \Omega)t] + \\ & + J_{2n}(nm) [\cos(n\omega_0 + 2\Omega)t + \cos(n\omega_0 - 2\Omega)t] + \\ & + J_{3n}(nm) [\cos(n\omega_0 + 3\Omega)t - \cos(n\omega_0 - 3\Omega)t] + \\ & + \dots \end{aligned} \right] \quad (6)$$

Из выражения (6) видны составляющие спектра импульсно-модулированного сигнала  $n\omega_0 \pm k\Omega$  ( $k=1, 2, 3\dots$ ). Рассмотрев приведенные выше виды модуляции радиосигналов и проведя аналогию с вибрационным сигналом, генерируемым зубчатой передачей, можно сделать вывод, что модуляции, исследуемые в вибродиагностике, являются комбинацией импульсной и других видов модуляций. В спектре сигнала с частотно-импульсной модуляцией можно наблюдать семейство

виде:

$$a(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \begin{aligned} & A_n \cos n\omega_0 t \cos(nm \sin \Omega t) - \\ & - A_n \sin n\omega_0 t \sin(nm \sin \Omega t) \end{aligned} \right] \quad (5)$$

Множители  $\cos(nm \sin \Omega t)$  и  $\sin(nm \sin \Omega t)$  являются периодическими функциями времени, поэтому могут быть разложены в ряды Фурье. Тогда выражение импульсно-модулированного сигнала в развернутом виде примет вид:

гармоник  $m\omega_0 \pm k\Omega$ , подобное семейству частот  $mf_z \pm kf_o$  в спектре вибрационного сигнала зубчатой передачи (рисунок 1). Несущим сигналом является последовательность ударных импульсов с частотой пересопряжения зубьев  $f_z$ , модулирующим является гармонический сигнал с частотой  $f_o$ . Различные виды модуляций могут возникать одновременно и приводить к увеличению амплитуд боковых полос и их несимметричности.

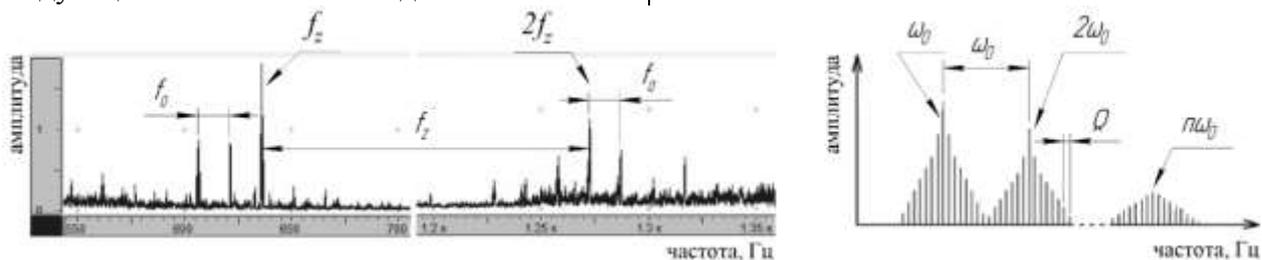


Рисунок 1. Спектры вибрации зубчатой передачи (слева) и импульсно-модулированного радиосигнала (справа)

Даже в исправной зубчатой передаче в силу погрешностей изготовления и сборки вход зубьев в зацепление сопровождается ударом. Поэтому признаки модуляции в спектре можно наблюдать и при отсутствии эксплуатационных повреждений зубьев. Амплитуды комбинационных гармоник  $mf_z \pm kf_o$  будут незначительны в силу малой энергии удара, боковые частоты будут слабо

различимы на фоне шумовой составляющей вибрации. Лишь зубцовые и кратные им гармоники  $mf_z$  легко идентифицируются в спектре вибрации исправной передачи. По мере появления и развития локального повреждения рабочей поверхности зуба возрастает энергия, рассеиваемая в зоне контакта, следовательно, растут амплитуды комбинационных гармоник. Все более

значимыми становятся боковые частоты, удаленные от несущей частоты. Поэтому очевидным диагностическим признаком будут являться амплитуды боковых полос, их количество, а также симметричность относительно центральной зубцовой гармоники.

### 3 Разработка нового диагностического параметра на основе явления модуляции

Сложность обнаружения эксплуатационных дефектов зубчатых колес на ранней стадии их развития обусловлена малой энергоемкостью вибрационных процессов, сопутствующих развитию этих дефектов. Поэтому выявление незначительных изменений вибрационного сигнала на фоне больших помех требует привлечения тонких методов анализа. Таким образом необходимо разработать такую количественную характеристику вибрационного сигнала, которая могла бы однозначно свидетельствовать о наличии и степени дефекта зубчатого колеса в составе многовального привода.

В [4, 7] предложено определять коэффициент глубины модуляции по формуле:

$$K = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}, \quad (7)$$

где  $A_{\max}$ ,  $A_{\min}$  – максимальная и минимальная амплитуда комбинированных частот модулированного сигнала, м/с<sup>2</sup>.

Однако данная зависимость не учитывает, насколько глубоко модулирован сигнал, т.е. не зависит от количества возникших боковых полос  $\pm kf_o$ . При возникновении и развитии дефектов основная информация содержится именно в количестве и амплитуде колебаний на комбинированных частотах. Предлагается определить коэффициент глубины модуляции для каждой боковой полосы  $m$ -го порядка в пределах одной совокупности зубцовой и комбинированных частот  $\pm kf_o$  по формуле (8), а затем рассчитать среднее

геометрическое значение по зависимости (9).

$$K^m = \frac{|A(mf_z) - A(mf_z \pm kf_o)|}{A(mf_z) + A(mf_z \pm kf_o)}, \quad (8)$$

$$K_M = \sqrt[k]{\prod_1^k K^m} \quad (9)$$

С ростом амплитуды колебаний на комбинационных частотах значение коэффициента будет уменьшаться и всегда будет меньше единицы ( $K_M < 1$ ), а при отсутствии модуляции коэффициент теоретически может быть равен единице ( $K_M = 1$ ). Когда мы говорим о постепенном увеличении дефекта, было бы логично, если бы коэффициент модуляции тоже увеличивался. Поэтому значение коэффициента глубины модуляции, рассчитанное по (9), вычтем из единицы. В результате получаем выражение для определения коэффициента модуляции вибрационного сигнала для каждой зубцовой гармоники  $mf_z$ :

$$K_M^m = \left( 1 - \sqrt[k]{\prod_1^k \frac{|A(mf_z) - A(mf_z \pm kf_o)|}{A(mf_z) + A(mf_z \pm kf_o)}} \right) \quad (10)$$

Максимальный порядок боковых полос  $k$  определим в соответствии с положениями модуляции сигналов, изложенными в [6]. Разработанный новый коэффициент модуляции, рассчитываемый по формуле (10) представляет собой соотношение амплитуд комбинационных частот вибрации многовального привода и учитывает импульсную природу возникновения модуляции. При изменении расположения датчика вибрации на корпусе исследуемого привода произойдет изменение абсолютных значений амплитуд значимых гармоник, но картина их распределения на спектре останется прежней. Это позволяет утверждать, что величина коэффициента модуляции будет сохранять свою величину и

таким образом будет мало зависеть от расположения датчика вибрации.

#### 4 Конструирование уникальных вейвлетных функций

При спектральном анализе сложных нестационарных сигналов, которые имеют место при вибрации многозвальных зубчатых приводов, можно отметить основной – используя преобразование Фурье, можно работать с нестационарным сигналом либо только во временной области, либо только в частотной, при этом отсутствует возможность получения информации о том, какие частоты присутствуют в сигнале в данный момент времени. Вейвлетный анализ решает эту проблему и позволяет локализовать источник вибрации как по частоте, так и во времени.

Вейвлет-преобразование реализуется на основе анализа сигнала с помощью вейвлетов, имеющих форму короткой волны [8, 9]. В настоящее время выбор вейвлетов довольно обширен. Однако необоснованное применение того или иного типа вейвлета способно привести к невозможности решения поставленных диагностических задач. Поэтому следует учитывать основные свойства вейвлетов при выборе наиболее подходящего типа для решения конкретных задач анализа вибрационных сигналов. Вейвлетная функция, применяемая для анализа вибрации зубчатых колес, должна быть асимметрична, приспособлена для выделения характерного резкого скачка амплитуды колебаний в начале ударного импульса, должна иметь узкий частотный образ, для обеспечения избирательности в частотной области, закон убывания функции по возможности должен быть экспоненциальным.

Среди существующих в настоящее время вейвлетов не все подходят для анализа вибросигналов в виду принципиально неприемлемых свойств [10]. Уровень систем компьютерных вычислений позволяет конструировать новые виды вейвлетов, максимально адаптированные для

диагностики неисправностей зубчатых передач. Основываясь на теории вейвлетов и вейвлет-преобразования, а также с учетом особенностей диагностики зубчатых передач, можно обозначить основные положения конструирования новых вейвлетных функций для непрерывного преобразования вибросигналов зубчатых передач:

- вейвлет должен обладать временным образом схожим с формой импульса, возникающего при входе зубьев в зацепление;
- вейвлетная функция должна иметь нулевой интеграл в области задания;
- вейвлетная функция должна иметь компактный носитель, т.е. быстро затухать в обоих направлениях;
- для удобства анализа результатов преобразования вейвлет должен иметь центральную частоту меньше 1.

Используя возможности современных систем компьютерной математики были сконструированы два уникальных вейвлета «Mexmor» и «Cosines», удовлетворяющих указанным выше положениям.

Для построения прототипа вейвлета «Mexmor» использованы левая часть вейвлета «Mexhat» и правая часть вейвлета «Morle» [8, 9]. Составная вейвлетная функция будет иметь следующий вид:

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{(2kt)^2}{2}} (1 - (kt)^2), & -\infty < t \leq 0, \\ e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(5t), & 0 < t < +\infty. \end{cases} \quad (11)$$

Приведенная составная функция непрерывна, интегрируема по всей длине, обладает свойством самоподобия, исключает разрыв в точке  $t=0$ . Для того чтобы обеспечить наследование доминирующей частоты при переходе от одного закона изменения к другому в выражение левой части вейвлета  $(-\infty, 0]$  введен коэффициент  $k=(5/\pi)$ , величина которого была определена аналитически. Согласно выражению (11) временной образ вейвлета и его частотный

образ (спектр) принимают вид, показанный на рисунке 2.

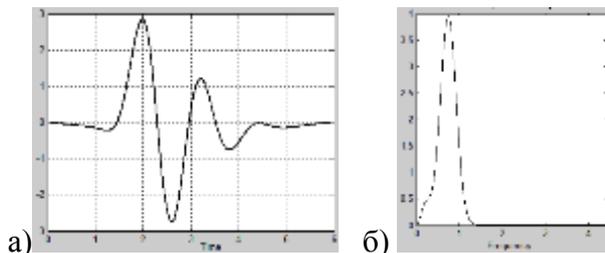


Рисунок 2 Новый вейвлет «Mexmog» (а) и его частотный образ (б)

Временной образ вейвлета «Mexmog» (рисунок 2а) имеет размах (-2.7, 2.8), что приводит к увеличению коэффициентов вейвлет-преобразования при выявлении характерных всплесков, а также повышает чувствительность данного вейвлета при анализе вибросигналов в сравнении с вейвлетами «Mexhat» и «Morlet». Пик частотного образа соответствует частоте  $f=0,7459$  Гц.

При «склеивании» разных функций, как было сделано при конструировании вейвлета «Mexmog», происходит нарушение периодичности вейвлетной функции, что приводит к увеличению ширины частотного образа и появлению второй доминирующей частоты. Поэтому был сконструирован еще один вейвлет «Cosines», состоящий из двух тригонометрических функций имеющих разную скорость экспоненциального затухания. Составная функция имеет вид:

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-16t^2} \cos(5t), & -\infty < t \leq 0, \\ e^{-\frac{t^2}{3}} \cos(5t), & 0 < t < +\infty. \end{cases} \quad (12)$$

Числовые коэффициенты в показателях степени экспоненты были подобраны эмпирически так, чтобы левая часть вейвлета имела только одну полуволну, а в правой части было три волны до практически полного затухания. При таком задании вейвлетной функции обе части имеют одинаковую доминирующую частоту, что даст узкий частотный образ вейвлета. На рисунке 3 представлены временной и

частотный образы уникального вейвлета «Cosines», описанного выражением (12).

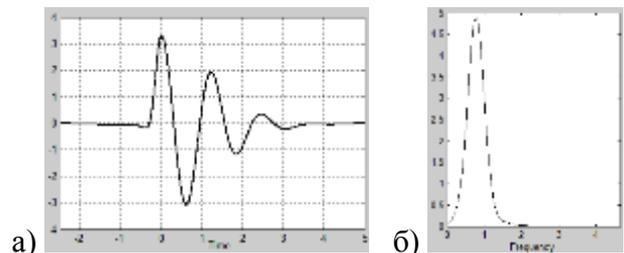


Рисунок 3. – Новый вейвлет «Cosines» (а) и его частотный образ (б)

Временной образ вейвлета «Cosines» (рисунок 3а) имеет размах (-3.5, 3.8), что также повышает чувствительность данного вейвлета при анализе вибросигналов. Пик частотного образа соответствует частоте  $f=0,7782$  Гц. Частотный образ узкий и имеет единственную доминирующую частоту.

Сконструированные вейвлеты могут быть использованы при непрерывном вейвлет разложении вибрационных сигналов без возможности их реконструкции. Значительно более высокие амплитудные характеристики временных образов позволят получить большие значения вейвлетных коэффициентов на временных интервалах прохождения зубьев зоны зацепления.

## 5 Экспериментальная апробация диагностики многовального привода на основе разработанного коэффициента модуляции

Для проверки применимости и эффективности диагностики на основе расчета разработанного коэффициента модуляции был проведен ряд натурных экспериментов. Объектом испытаний являлся привод главного движения токарного станка СН-501, кинематическая цепь которого состоит из цилиндрических прямозубых передач. Вращение и крутящий момент передавался от входного вала коробки скоростей на вал шпинделя посредством пяти передач, состоящих из однозубчатых зубчатых колес и блоков шестерен. Для разработки и оценки

применимости методик диагностики многовального привода были изготовлены экспериментальные зубчатые колеса, имитирующие отклонение от нормального технического состояния и имеющие локальный дефект различного масштаба в виде повреждения рабочей части зуба ведомой шестерни одной из передач.

Испытания проводились как без нагрузки, так и под нагрузкой. Замеры виброактивности многовального зубчатого привода производились при различных частотах вращения выходного вала с помощью одноосевого акселерометра AP-98. Управление процессом измерения и исследование параметров вибрации осуществлялось с помощью программно-аппаратного комплекса, состоящего из виброанализатора «Викма-2», подключаемых датчиков и персонального компьютера с установленной диагностической системой «Анализатор».

Характер изменения коэффициента модуляции при развитии локального дефекта экспериментального зубчатого колеса показан на рисунке 4.

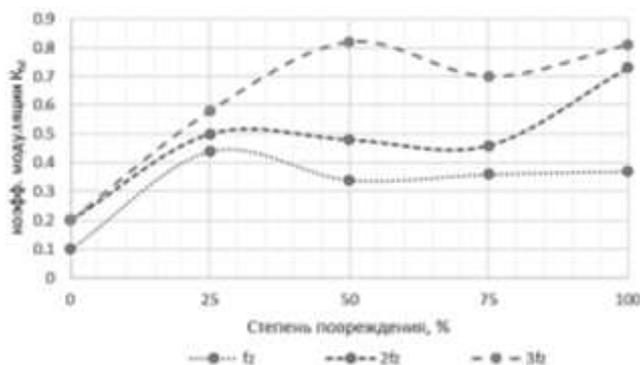


Рисунок 4. - Графики изменения коэффициента модуляции при развитии локального дефекта экспериментального зубчатого колеса

При отсутствии дефекта коэффициент модуляции невелик. При появлении и развитии дефекта модуляция сигнала усиливается и коэффициент начинает увеличиваться. Модуляция наиболее отчетливо проявляется на высокочастотных составляющих сигнала, т.е. в окрестности второй и третьей зубцовых частот  $2f_z$ ,  $3f_z$ . Это объясняется тем, что на более высоких

частотах сигнал более «чистый» и меньше вероятность наложения спектров колебаний от других зубчатых пар и прочих источников колебаний.

Также следует отметить, что даже при отсутствии моделируемого локального дефекта наблюдается небольшая модуляция  $0,1 \dots 0,2$ . Это объясняется наличием у колеса дефектов изготовления. При зарождении дефекта модуляция усиливается, и при дальнейшем развитии дефекта рост модуляции замедляется и даже начинает незначительно падать. Ближе к критическому состоянию, такому как, поломка зуба, коэффициент снова значительно возрастает.

Результаты исследований также показали, что коэффициенты модуляции для заведомо исправных зубчатых колес, расположенных на других валах экспериментального многовального привода, не превышали значений 0,4, что свидетельствовало об отсутствии выраженных эксплуатационных дефектов. При этом колебания величин коэффициентов имели случайный характер, были незначительными по величине, что подтвердило приемлемую повторяемость результатов.

Таким образом, при спектральном анализе вибрационных сигналов многовальных зубчатых приводов и неизвестных первоначальных параметрах вибрации можно диагностировать наличие повреждения зубьев зубчатых колес по величине коэффициента модуляции второй и третьей зубцовых гармоник, если он начинает превышать значение 0,5. Для того, чтобы выяснить, на какой стадии развития находится локальный дефект необходимо провести дальнейшие наблюдения за изменением виброактивности зубчатого привода и установить тренды изменения коэффициентов модуляции.

## 6 Диагностика многовального привода на основе вейвлетного преобразования вибрационного сигнала с использованием уникальных вейвлетов

С целью последующего анализа вейвлет-коэффициентов было выполнено непрерывное вейвлет-преобразование вибросигналов экспериментального многовального зубчатого привода с использованием сконструированных уникальных вейвлетов. Преобразование осуществлялось с применением равномерной шкалы временных масштабов. При вычислении вейвлет-коэффициентов частоты просмотра были ограничены интервалом  $[50, 1600]$  Гц, который

охватывает гармоники  $f_z$  и  $2f_z$  экспериментального зубчатого колеса.

На рисунке 5 приведены скейлограммы для сигналов вибрации соответствующих зарождению и развитию локального повреждения рабочей поверхности экспериментального колеса, построенные с использованием уникальных вейвлетов «Mexmor» и «Cosines». На представленных скейлограммах шкала временного масштаба заменена шкалой псевдо-частоты с единицей измерения Гц для удобства визуального анализа. Стоит помнить, что псевдо-частоты не имеют точного соответствия частотам колебаний анализируемого сигнала в связи с особенностями вейвлет-преобразования.

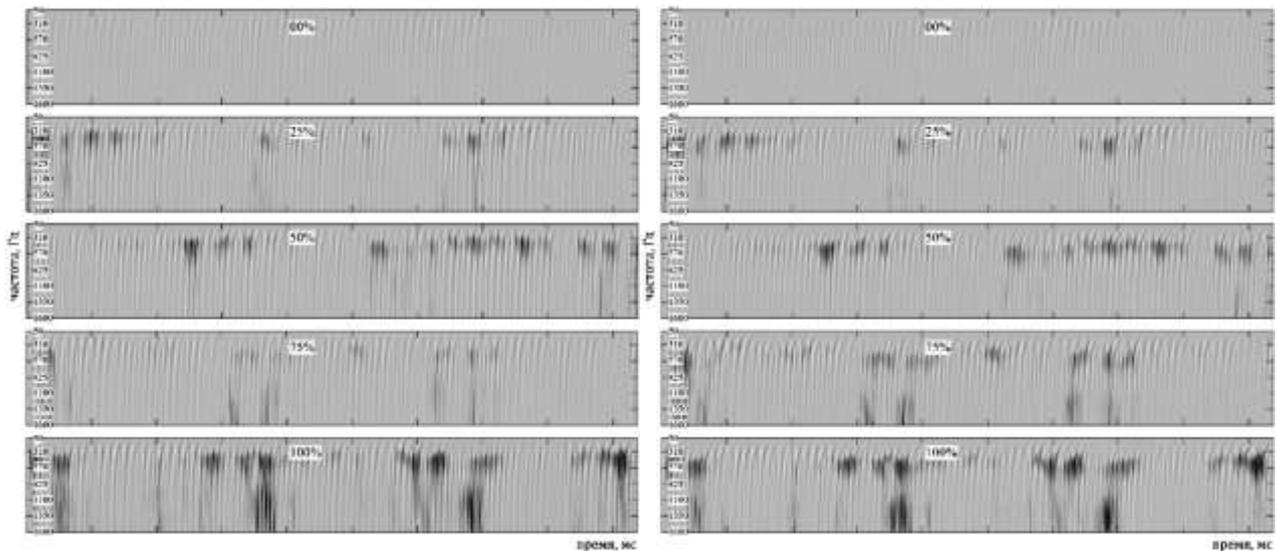


Рисунок 5. – Скейлограмма разложения вибросигнала вейвлетом «Mexmor» (слева) и «Cosines» (справа)

Прямой анализ скейлограмм показал, что при ухудшении технического состояния экспериментального привода происходит возрастание абсолютных значений вейвлет-коэффициентов. Причем до полной поломки зуба наиболее чувствительны оказываются коэффициенты соответствующие области первой зубцовой частоты  $f_z$  поврежденного колеса. При полной поломке зуба максимальные значения коэффициентов перемещаются в область второй зубцовой частоты  $2f_z$ . Этот факт позволяет однозначно диагностировать полную поломку зуба

колеса в составе многовального привода по внешнему виду скейлограммы.

При сильном повреждении зуба (75 и 100%) на скейлограммах можно проследить моменты входа поврежденного зуба в зону зацепления. Кроме этого всплески колебательной энергии оказываются «растянутыми» вдоль оси частот, что говорит о широком диапазоне спектра импульса, возникающего при входе зубьев в зацепление. Так как колебания, возбуждаемые в зацеплении, характеризуются временем затухания, то на

скейлограммах это отражается в растянутости всплесков вдоль оси времени.

Визуальная оценка полученных скейлограмм является грубой, требует глубокого понимания принципов вейвлет-преобразования. Наиболее эффективным является анализ полученного массива вейвлет-коэффициентов, из которого можно извлекать интересующие подмассивы данных и использовать их для вычисления численных критериев.

На рисунке 6 приведены зависимости максимальных значений вейвлет-коэффициентов при деградации зубчатого колеса многовального привода, полученных преобразованием вибрационных сигналов с использованием стандартного вейвлета «Morlet» и спроектированных уникальных вейвлетов «Mexmor» и «Cosines».

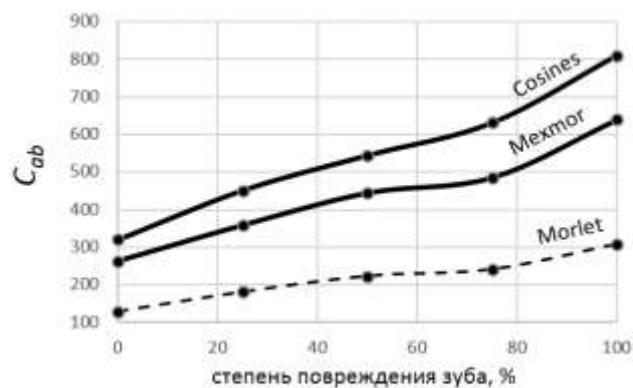


Рисунок 6. – Графики максимальных вейвлет-коэффициентов, полученных с помощью различных вейвлетов

При прочих равных условиях спроектированные вейвлеты «Mexmor» и «Cosines» позволяют получить более «крутой» график зависимости максимальных коэффициентов от степени повреждения экспериментального зубчатого колеса. Это связано с величиной размаха временных образов данных вейвлетов, которые в несколько раз превышают размах вейвлета «Morlet».

## 7 Заключение

Проведя аналогию между модуляцией вибросигнала и радиосигнала, удалось

выяснить природу возникновения модуляционных явлений в вибрации зубчатых передач. Зубчатая передача генерирует последовательность быстрозатухающих всплесков колебательной энергии (импульсов). При зарождении и развитии локальных повреждений зубьев происходит изменение периода следования импульсов, а также их амплитуды и ширины, что приводит к импульсной модуляции сигнала. Разложение такого сигнала в ряды Фурье позволило получить математическую модель импульсно-модулированного вибросигнала. В результате моделирования вибрационных сигналов с заданными формой и отклонениями ударных импульсов были получены спектры, картина которых вполне соотносится с разработанной математической моделью импульсно-модулированного сигнала.

Вейвлетное «сканирование» вибросигнала чувствительно к всплескам колебательной энергии, вызванным соударением зубьев, при этом шумовая составляющая сложного вибросигнала оказывается прозрачна и не приводит к искажению диагностической информации. В рамках исследований был сконструирован ряд уникальных вейвлетов с учетом ударного характера взаимодействия зубчатой пары. Наиболее эффективным оказался анализ с использованием разработанного вейвлета «Cosines» по форме близкий к форме ударного импульса и имеющий частотный образ с четко выраженной центральной частотой. Всплески максимальных значений вейвлет-коэффициентов при разложении вибросигнала с использованием данного вейвлета имеют значительно лучшую локализацию во временной области в сравнении с общеизвестными вейвлетами, такими как вейвлет «Mexhat» и «Morlet».

Полученные научные результаты имеют практическую направленность и могут быть использованы машиностроительными предприятиями и организациями, занимающимися изготовлением и эксплуатацией зубчатых передач для оценки

их технического состояния, научными организациями для дальнейшего развития в области диагностики зубчатых передач и механизмов.

#### Список использованных источников

[1] Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 2000. – 408 с.

[2] Гоноровский, И.С. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Радио и связь, 1986. – 512 с.

[3] Зюко, А.Г. Теория электрической связи : учебник для вузов / А.Г. Зюко, Д.Д. Кловский, В.И. Коржик, М.В. Назаров; под ред. Д.Д. Кловского. – М. : Радио и связь, 1999. – 432 с.

[4] Костюков, В.Н. Основы виброакустической диагностики машинного оборудования : учеб. пособие / В.Н. Костюков, А.П. Науменко и др. – Омск : НПЦ «Динамика», 2007. – 286 с.

[5] Петрухин, В.В. Основы вибродиагностики и средства измерения вибрации : учеб. пособие. – М. : Инфра-Инженерия, 2010. – 176 с.

[6] Омель, Д.В. Механизмы формирования комбинационных частот в спектре вибросигнала зубчатой передачи / Д.В. Омель, А.В. Драган, // Новые технологии и материалы, автоматизация производства : материалы междунар. науч.-техн.

конф., Брест, 2-3 ноября 2016 г. / УО «Брестский государственный технический университет». – Брест, 2016. – С. 89–94.

[7] Генкин, М.Д. Виброакустическая диагностика машин и механизмов / Генкин М.Д., Соколова А.Г. – М. : Машиностроение, 1987. – 288 с.

[8] Драган, Д.В. Применение вейвлет-анализа в вибродиагностике многовальных зубчатых приводов / А.В. Драган, Д.В. Омель // Жизненный цикл конструкционных материалов : сб. тр. IV Всероссийской науч.-техн. конф. с междунар. участием, Иркутск, 28–30 апреля 2014 г. / Иркутский государственный технический университет. – Иркутск, 2014. – с. 320–326.

[9] Омель, Д.В. Применение вейвлет-анализа при исследовании ударных взаимодействий в зубчатых передачах многовальных приводов / Д.В. Омель, А.В. Драган // Вестник Брестского государственного технического университета. – 2015. – №4(94) : Машиностроение. – с. 4–8.

[10] Омель, Д.В. Проектирование уникальных вейвлетов для повышения эффективности диагностики многовальных зубчатых приводов на основе вейвлет-анализа вибрационных сигналов / Д.В. Омель, А.В. Драган // Вестник Брестского государственного технического университета. – 2017. – №4(106) : Машиностроение. – С. 31–36.

**NEW APPROACHES IN MULTI-SHAFT GEAR DRIVES  
VIBRATION DIAGNOSTICS**

**Dmitry V. Omes  
Alexandr V. Dragan**

Brest State Technical University  
267, Moskovskaya str., Brest,  
224017, Republic of Belarus

dimaomes@gmail.com

*Presented studies are aimed at developing of new and improving of existing methods of vibration signal analysis to detect local gears damages during their operating. The new method of calculating the modulation coefficient showed low sensitivity to the place of mounting of the vibration sensor and makes it possible to use in the absence of information about the vibration activity of the gear drive in the previous workable condition. A technique for designing and using unique wavelets was developed. The technique reflects the specifics of real processes in the interaction of meshing teeth and adapted for gears vibration analysis. Using of unique wavelets can noticeably increase the wavelet coefficients sensitivity to changes in gears condition.*

**Key words:** gear transmission, vibration, diagnostics, signal, spectrum, modulation, wavelet, analysis

## References

- [1] Baskakov, S.I. Radio circuits and signals [Radiotekhnicheskie tsepi i signaly]. – 3-e izd., pererab. i dop. – Moskva: Vysshaya shkola, 2000, 408 p. (in Russian).
- [2] Gonorovski, I.S. Radio circuits and signals : textbook for universities [Radiotekhnicheskie tsepi i signaly]. 4-e izd. pererab. i dop. – Moskva : Radio i svjaz', 1986, 512 p. (in Russian)
- [3] Zjuko, A.G. Theory of electrical communication : textbook for universities [Teoriya elektricheskoy svjazi] / A.G. Zjuko, D.D. Klovskij, V.I. Korzhik, M.V. Nazarov ; pod. red. D.D. Klovskogo. – Moskva : Radio i svjaz', 1999, 432 p. (in Russian)
- [4] Kostjukov, V.N. Fundamentals of machinery vibro-acoustic diagnostics : tutorial [Osnovy vibroakusticheskoy diagnostiki mashinnogo oborudovaniya] / V.N. Kostjukov, A.P. Naumenko i dr. – Omsk : NPC «Dinamika», 2007, 286 p. (in Russian)
- [5] Petruhin, V.V. Fundamentals of vibration diagnostics and vibration measuring instruments : tutorial [Osnovy vibrodiagnostiki i sredstva izmereniya vibracii]. – M. : Infra-Inzheneriya, 2010, 176 p.
- [6] Omes, D.V. Formation mechanisms of combinational frequencies in gear vibration spectrum [Mekhanizmy formirovaniya kombinacionnyh chastot v spektre vibrosignala zubchatoj peredachi] / D.V. Omes, A.V. Dragan, // Novye tekhnologii i materialy, avtomatizaciya proizvodstva : materialy mezhdunar. nauch.-tekhn. konf., Brest, 2-3 noyabrya 2016 g. / UO «Brestskij gosudarstvennyj tekhnicheskij universitet». – Brest, 2016, pp. 89–94. (in Russian)
- [7] Genkin, M.D. Vibroacoustic diagnostics of machines and mechanisms [Vibroakusticheskaya diagnostika mashin i mekhanizmov] / Genkin M.D., Sokolova A.G. – M. : Mashinostroenie, 1987, 288 p. (in Russian)
- [8] Dragan, D.V. Wavelet analysis application in multi-shaft gear drives vibrodiagnostics [Primenenie vejvlet-analiza v vibrodiagnostike mnogoval'nyh zubchatyh privodov] / A.V. Dragan, D.V. Omes // ZHiznennyj cikl konstrukcionnyh materialov : sb. tr. IV Vserossijskoj nauch.-tekhn. konf. s mezhdunar. uchastiem, Irkutsk, 28–30 aprelya 2014 g. / Irkutskij gosudarstvennyj tekhnicheskij universitet. – Irkutsk, 2014, pp. 320–326. (in Russian)
- [9] Omes, D.V. Wavelet-analysis application in research of multishaft drives tooth gears impact interactions [Primenenie vejvlet-analiza pri issledovanii udarnyh vzaimodejstvij v zubchatyh peredachah mnogoval'nyh privodov] / D.V. Omes, A.V. Dragan // Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. – 2015. – №4(94) : Mashinostroenie, pp. 4–8. (in Russian)
- [10] Omes, D.V. Unique wavelets design for improving effectiveness of multishaft gear drives diagnostics based on vibrational signals wavelet analysis [Proektirovanie unikal'nyh vejvletov dlya povysheniya effektivnosti diagnostiki mnogoval'nyh zubchatyh privodov na osnove vejvlet-analiza vibracionnyh signalov] / D.V. Omes, A.V. Dragan // Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. – 2017. – №4(106) : Mashinostroenie, pp. 31–36. (in Russian)

## ВЛИЯНИЕ ГИДРОДРОБЕСТРУЙНОЙ ОБРАБОТКИ НА ПРЕДЕЛ ВЫНОСЛИВОСТИ ОБРАЗЦОВ С НАДРЕЗОМ ПРИ ИЗГИБЕ И РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

**В.Ф. Павлов,  
В.А. Кирпичёв,  
В.С. Вакулюк,  
В.П. Сазанов,  
П.А. Шляпников**

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва  
Московское шоссе, 34,  
г. Самара, Российская Федерация,  
443086

pavlov.vf@ssau.ru

*В работе исследовано влияние гидродробеструйной обработки на предел выносливости при изгибе и растяжении-сжатии в случае симметричного цикла цилиндрических образцов с круговым надрезом полукруглого профиля радиуса 0,3 мм. Образцы диаметром 10 мм для испытаний на усталость изготавливались из сталей 30ХГСА, 12Х18Н10Т, ЭИ961, 45 и алюминиевых сплавов В93, Д16Т. Влияние поверхностного упрочнения на предел выносливости образцов с надрезом оценивалось по двум критериям: остаточным напряжениям на поверхности надреза и среднеинтегральным остаточным напряжениям, вычисленным по толщине поверхностного слоя опасного сечения образцов, равной критической глубине нераспространяющейся трещины усталости.*

*По результатам определения остаточных напряжений и предела выносливости образцов с надрезом установлено, что коэффициенты влияния поверхностного упрочнения на приращение предела выносливости при изгибе и растяжении-сжатии по обоим критериям примерно одинаковы. Однако коэффициент влияния по критерию среднеинтегральных остаточных напряжений изменяется в значительно меньших пределах, чем коэффициент влияния по критерию остаточных напряжений на поверхности концентратора. Поэтому для оценки влияния поверхностного упрочнения на предел выносливости деталей с концентраторами напряжений следует использовать критерий среднеинтегральных остаточных напряжений.*

*На примере образцов при наличии и отсутствии наклёпа в опасном сечении показано, что в условиях концентрации напряжений наклёп не оказывает влияния на предел выносливости поверхностно упрочнённой детали. На предел выносливости таких деталей оказывают влияние только сжимающие остаточные напряжения.*

**Ключевые слова:** гидродробеструйная обработка, образец с надрезом, предел выносливости, изгиб, растяжение-сжатие, симметричный цикл, остаточные напряжения, критическая глубина нераспространяющейся трещины усталости, критерий среднеинтегральных остаточных напряжений.

### 1 Введение

В практике современного машиностроения широкое применение находят различные методы поверхностного пластического деформирования (ППД), использование которых приводит к повышению сопротивления усталости деталей. Особенно эффективно применение ППД для деталей с концентраторами напряжений. Основную роль в повышении сопротивления усталости упрочнённых деталей играют сжимающие остаточные напряжения, наведённые в

тонком поверхностном слое [1-7], поэтому влияние поверхностного упрочнения на предел выносливости чаще всего оценивается по остаточным напряжениям в опасном сечении деталей.

Для оценки влияния упрочнения на приращение предела выносливости  $\Delta\sigma_{-1}$  при симметричном цикле в случае изгиба ( $\Delta\sigma_{-1}$ ) и растяжения-сжатия ( $\Delta\sigma_{-1p}$ ) деталей используются два критерия. Первый критерий – осевые остаточные напряжения

на поверхности опасного сечения  $\sigma_z^{нов}$ ; в этом случае приращение предела выносливости определяется по формуле

$$\Delta p_{-1} = \psi_p \cdot |\sigma_z^{нов}|, \quad (1)$$

где  $\psi_p$  ( $\psi_\sigma$ ) – коэффициент влияния упрочняющей обработки на предел выносливости по критерию  $\sigma_z^{нов}$ . Второй критерий – среднеинтегральные остаточные напряжения  $\bar{\sigma}_{ост}$  [8], вычисленные по толщине поверхностного слоя опасного сечения детали, равной критической глубине  $t_{кр}$  нераспространяющейся трещины усталости (рисунок 1); в этом случае приращение предела выносливости определяется по формуле

$$\Delta p_{-1} = \bar{\psi}_p \cdot |\bar{\sigma}_{ост}|, \quad (2)$$

где  $\bar{\psi}_p$  ( $\bar{\psi}_\sigma$ ) – коэффициент влияния упрочняющей обработки на предел выносливости по критерию  $\bar{\sigma}_{ост}$ ;

$$\bar{\sigma}_{ост} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sigma_z(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi; \quad (3)$$

$\sigma_z(\xi)$  – осевые остаточные напряжения в опасном сечении детали по толщине поверхностного слоя  $y$ ;  $\xi = y/t_{кр}$  – расстояние от поверхности детали до текущего слоя, выраженное в долях  $t_{кр}$ .

Многочисленными экспериментальными исследованиями [9-12] было установлено, что критическая глубина нераспространяющейся трещины усталости  $t_{кр}$ , возникающей в упрочнённой детали с концентратором напряжений при работе на пределе выносливости, зависит только от размера опасного поперечного сечения и определяется по формуле [9-11]

$$t_{кр} = 0,0216 D_1, \quad (4)$$

где  $D_1$  – диаметр опасного поперечного сечения детали (рисунок 1).

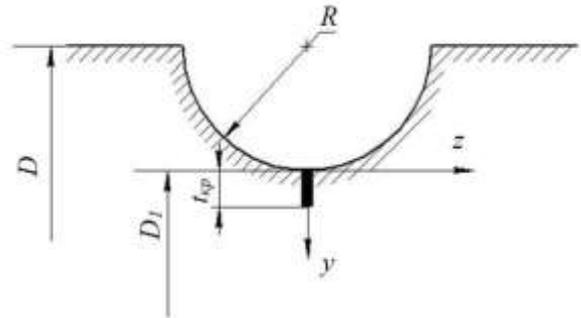


Рисунок 1. Деталь с круговым надрезом полукруглого профиля и нераспространяющаяся трещина усталости

В соответствии с формулами (1) – (3) оценка влияния упрочняющей обработки на предел выносливости деталей с концентраторами напряжений производилась по осевым  $\sigma_z$  остаточным напряжениям, действующим в опасном сечении деталей, так как осевые напряжения являются наибольшими по модулю из трёх главных напряжений, действующих в этом сечении, радиальные равны нулю или близки к нулю, а окружные имеют промежуточное значение. Поэтому в соответствии с теорией наибольших касательных напряжений осевые остаточные напряжения являются ответственными за повышение предела выносливости упрочнённых ППД деталей с концентраторами напряжений.

## 2 Предмет исследования

В исследовании изучалось влияние поверхностного пластического деформирования на предел выносливости при изгибе и растяжении-сжатии в случае симметричного цикла цилиндрических образцов из различных материалов с круговым надрезом полукруглого профиля радиуса  $R = 0,3$  мм. Механические характеристики используемых в исследовании материалов приведены в таблице 1. Цилиндрические гладкие образцы диаметром  $D = 10$  мм из сталей 30ХГСА, 12Х18Н10Т, сплава В93 для испытаний на изгиб и из сталей ЭИ961, 45, сплава Д16Т для испытаний на растяжение-сжатие подвергались гидродробеструйной

обработке (ГДО) стальными шариками диаметром 2 мм в течение 8 минут при давлении масла 0,28 МПа (стали), и 0,19 МПа (алюминиевые сплавы В93, В95).

Таблица 1. Механические характеристики материалов

Материал	Механические характеристики				
	$\sigma_e$ , МПа	$\sigma_{0,2}$ , МПа	$\delta$ , %	$\psi$ , %	$S_k$ , МПа
30ХГСА	788	536	18,9	65,9	1484
12Х18Н10Т	646	281	50,8	65,6	1444
ЭИ961	1090	990	11,3	67,4	2050
сталь 45	610	396	24,2	51,8	1010
В93	334	219	16,3	20,8	358
Д16Т	547	426	14,8	16,5	647

### 3 Результаты исследования

Остаточные напряжения в гладких образцах определялись двумя методами: методом колец и полосок [13,14] и методом удаления части цилиндрической поверхности [15]. Необходимо отметить, что распределение остаточных напряжений, определённых двумя методами, имело хорошее совпадение. На рисунке 2 приведены эпюры осевых  $\sigma_z$  остаточных напряжений по толщине поверхностного слоя  $y$  гладких образцов.

На неупрочнённые и упрочнённые ГДО гладкие образцы безнаклёпным способом (вначале фасонным резцом, а затем электрополированием) наносились круговые надрезы полукруглого профиля радиуса  $R = 0,3$  мм (рис. 1). Остаточные напряжения в образцах с надрезом, вызванные перераспределением остаточных усилий гладкого образца при нанесении надреза, определялись аналитическим [16,17] и численным [18-22] методами.

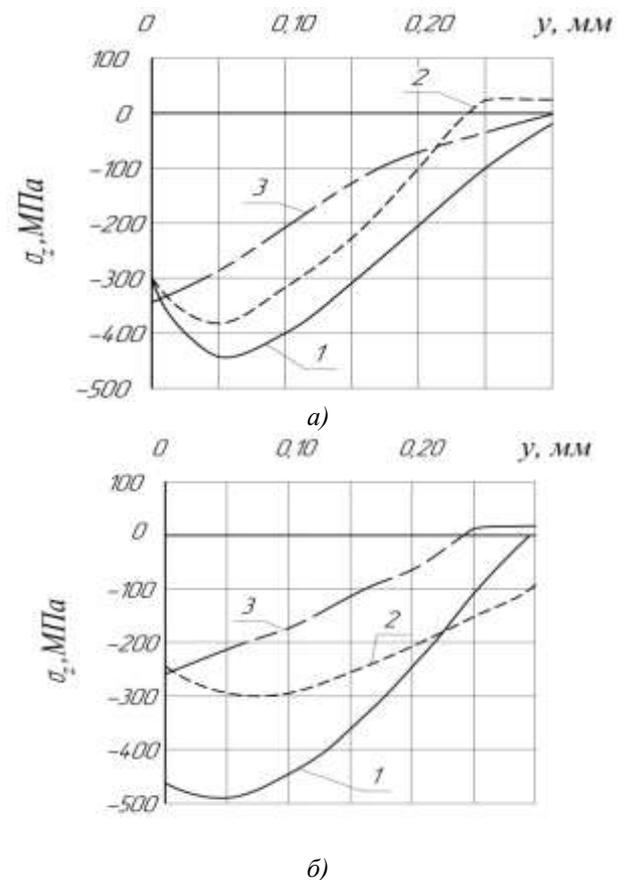


Рисунок 2. Осевые  $\sigma_z$  остаточные напряжения в гладких образцах для испытаний на изгиб (а) и растяжение-сжатие (б) после ГДО: а) – 1-30ХГСА, 2-12Х18Н10Т, 3-В93; б) – 1-ЭИ961, 2-сталь 45, 3-Д16Т

Результаты расчётов, выполненные двумя методами, практически совпали. На рисунке 3 приведены эпюры осевых  $\sigma_z$  остаточных напряжений по толщине

поверхностного слоя у наименьшего сечения образцов с надрезом.

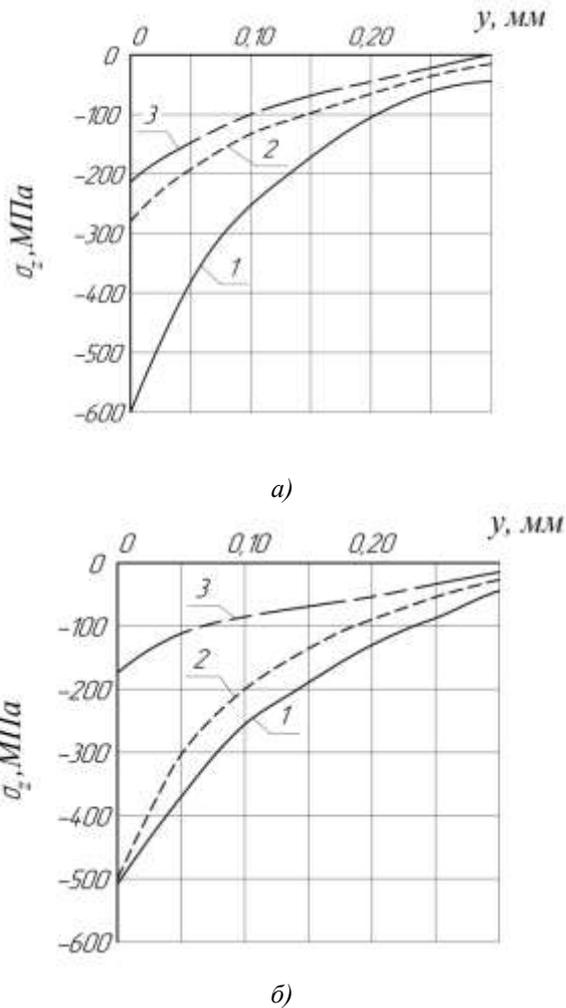


Рисунок 3. Осевые  $\sigma_z$  остаточные напряжения в образцах для испытаний на изгиб (а) и растяжение-сжатие (б): а) – 1-30ХГСА, 2-12Х18Н10Т, 3-В93; б) – 1-ЭИ961, 2-сталь 45, 3- Д16Т

Из приведённых на рисунке 3 эпюр видно, что в некоторых случаях (стали 30ХГСА, 45) наибольшие сжимающие остаточные напряжения превышают предел текучести  $\sigma_{0,2}$  материала (таблица 1). Этому факту дано объяснение в работах [13, 23, 24], где доказано, что в поверхностном слое упрочнённых ППД деталях за счёт повышения механических характеристик материала наибольшая величина остаточных напряжений может даже превышать

сопротивление разрыву  $S_k$  на 15%, которая в данном исследовании не достигнута.

Испытания на усталость при симметричном цикле неупрочнённых и упрочнённых ГДО образцов с круговым надрезом полукруглого профиля  $R = 0,3$  мм при чистом изгибе с вращением проводились на машине МУИ-6000 и при растяжении-сжатии – на машине УММ-01; база испытаний –  $3 \cdot 10^6$  циклов нагружения. Результаты определения предела выносливости образцов при изгибе  $\sigma_{-1}$  и при растяжении-сжатии  $\sigma_{-1p}$  представлены в таблицах 2 и 3. Для определения критической глубины  $t_{кр}$  нераспространяющейся трещины усталости упрочнённые образцы с надрезом, выстоявшие базу испытаний при напряжении, равном пределу выносливости, доводились до разрушения при большем напряжении. Экспериментальные значения  $t_{кр}$  представлены в таблицах 2 и 3. Средние значения критической глубины нераспространяющейся трещины усталости  $(t_{кр})_{cp}$ , установленные в настоящем исследовании при изгибе  $(t_{кр})_{cp} = 0,205$  мм и при растяжении-сжатии  $(t_{кр})_{cp} = 0,201$  мм практически не отличаются от значений, вычисленных по формуле (4), которые составляют при изгибе и растяжении-сжатии ( $D_1 = 9,4$  мм)  $t_{кр} = 0,203$  мм. Следовательно, проведённое исследование показывает, что для определения  $t_{кр}$  формула (4) справедлива как при изгибе, так и при растяжении-сжатии.

В таблицах 2 и 3 приведены также значения осевых остаточных напряжений на поверхности надрезов  $\sigma_z^{нов}$ , среднеинтегральных остаточных напряжений  $\bar{\sigma}_{ост}$ , вычисленных по формуле (3), коэффициентов влияния упрочняющей обработки  $\psi_\sigma$  и  $(\bar{\psi}_\sigma)^{эксн}$  по критериям  $\sigma_z^{нов}$  и  $\bar{\sigma}_{ост}$ , вычисленных по формулам (1) и (2).

Таблица 2. Результаты испытаний образцов с надрезом  $R = 0,3$  мм на усталость при изгибе и определения остаточных напряжений

Материал	$K_\sigma$	Неупрочн. образцы $\sigma_{-1}$ , МПа	Упрочнённые образцы						
			$\sigma_{-1}$ , МПа	$\sigma_z^{нов}$ , МПа	$\psi_\sigma$	$t_{кр}$ , мм	$\bar{\sigma}_{ост}$ , МПа	$(\bar{\psi}_\sigma)^{эксн}$	$(\bar{\psi}_\sigma)^{расч}$
30ХГСА	2,11	180	270	-620	0,145	0,204	-233	0,386	0,377
12Х18Н10Т	2,01	175	220	-268	0,168	0,207	-126	0,356	0,383
В93	474	67,5	100	-213	0,153	0,203	-96	0,339	0,401

Таблица 3. Результаты испытаний образцов с надрезом  $R = 0,3$  мм на усталость при растяжении-сжатии и определения остаточных напряжений

Материал	$K_\sigma$	Неупрочн. образцы $\sigma_{-1p}$ , МПа	Упрочнённые образцы						
			$\sigma_{-1p}$ , МПа	$\sigma_z^{нов}$ , МПа	$\psi_\sigma$	$t_{кр}$ , мм	$\bar{\sigma}_{ост}$ , МПа	$(\bar{\psi}_\sigma)^{эксн}$	$(\bar{\psi}_\sigma)^{расч}$
ЭИ961	2,57	151,3	233,4	-500	0,164	0,198	-258	0,357	0,347
сталь 45	2,08	152,5	200	-478	0,099	0,206	-134	0,355	0,379
Д16Т	2,04	78,4	105	-160	0,166	0,200	-75,3	0,353	0,381

Из представленных в таблицах 2 и 3 данных следует, что среднее значение коэффициента влияния упрочняющей обработки на предел выносливости при изгибе по критерию  $\sigma_z^{нов}$  составляет  $(\psi_\sigma)_{cp} = 0,155$ , а при растяжении-сжатии –  $(\psi_\sigma)_{cp} = 0,143$ , то есть средние значения коэффициента  $\psi_\sigma$  различаются незначительно. Однако следует отметить, что в настоящем исследовании крайние значения коэффициента  $\psi_\sigma$  составляют 0,099 (сталь 45) и 0,168 (12Х18Н10Т), то есть отличаются в 1,7 раза. Для исследованных в монографии [11] образцов и деталей, подобное различие составляет 38 раз. Этот факт объясняется тем, что в настоящем исследовании распределения сжимающих остаточных напряжений по толщине опасного поперечного сечения образцов с надрезом, равной критической глубине нераспространяющейся трещины усталости  $t_{кр}$ , аналогичны (рис. 3), в отличие от многообразия характера распределения остаточных напряжений в работе [11].

Среднее значение коэффициента влияния упрочняющей обработки на предел выносливости при изгибе по критерию  $\bar{\sigma}_{ост}$

составляет  $(\bar{\psi}_\sigma)_{cp}^{эксн} = 0,360$ , а при растяжении-сжатии –  $(\bar{\psi}_\sigma)_{cp} = 0,355$ , то есть в настоящем исследовании (также как и с коэффициентами  $\psi_\sigma$ ) коэффициенты  $\bar{\psi}_\sigma$  при изгибе и растяжении-сжатии практически одинаковы. Следует отметить, что коэффициенты  $\bar{\psi}_\sigma$  изменяются в меньших пределах, чем коэффициенты  $\psi_\sigma$ , то есть оценка влияния поверхностного упрочнения на предел выносливости при изгибе и растяжении-сжатии образцов (деталей) в условиях концентрации напряжений по критерию  $\bar{\sigma}_{ост}$  является более точной, чем по критерию  $\sigma_z^{нов}$ .

Анализируя эпюры остаточных напряжений для упрочнённых ГДО гладких образцов (рис. 2), можно видеть, что толщина поверхностного слоя со сжимающими остаточными напряжениями в образцах из сталей 30ХГСА и 45 превышает 0,3 мм. Поэтому после нанесения на гладкие образцы надреза с радиусом  $R = 0,3$  мм поверхностный слой опасного сечения этих образцов находится в наклёпанном состоянии в отличие от образцов с надрезом из сталей 12Х18Н10Т, ЭИ961 и сплавов В93,

Д16Г, в поверхностном слое которых наклёп отсутствует. Однако по результатам определения коэффициентов  $\psi_\sigma$  и  $\bar{\psi}_\sigma$  можно сделать заключение о том, что наличие наклёпа в опасном сечении не оказывает влияние на предел выносливости образцов с концентраторами напряжений. Это заключение соответствует выводам работ [1-3], в которых экспериментально установлено, что в условиях концентрации напряжений наклёп не влияет на предел выносливости деталей.

В таблицах 2 и 3 приведены значения эффективного коэффициента концентрации напряжений  $K_\sigma$ , определённого для цилиндрических образцов с круговым надрезом полукруглого профиля по данным работы [25] в зависимости от предела прочности материала образцов. В работе [11] на основании многочисленных экспериментов была установлена зависимость между коэффициентом влияния  $(\bar{\psi}_\sigma)^{расч}$  и эффективным коэффициентом концентрации напряжений  $K_\sigma$  в виде

$$(\bar{\psi}_\sigma)^{расч} = 0,514 - 0,065K_\sigma. \quad (5)$$

Значения коэффициента  $(\bar{\psi}_\sigma)^{расч}$ , вычисленные по зависимости (5), приведены в таблицах 2 и 3. Средние величины коэффициента  $(\bar{\psi}_\sigma)^{расч}$  составили: при изгибе –  $(\bar{\psi}_\sigma)^{расч} = 0,387$ , при растяжении-сжатии –  $(\bar{\psi}_\sigma)^{расч} = 0,369$ , что незначительно отличается от средних значений коэффициентов  $(\bar{\psi}_\sigma)_{ср}^{эксп}$ , полученных на основании эксперимента (при изгибе  $(\bar{\psi}_\sigma)_{ср}^{эксп} = 0,360$ , при растяжении-сжатии  $(\bar{\psi}_\sigma)_{ср}^{эксп} = 0,355$ ). Следовательно, формулы (2) и (5) можно использовать для прогнозирования приращения предела выносливости поверхностно-упрочнённых цилиндрических деталей с надрезами полукруглого профиля при изгибе и растяжении-сжатии.

#### 4 Выводы

1. При оценке влияния гидродробеструйной обработки на предел выносливости при изгибе и растяжении-сжатии образцов с надрезом по критерию осевых остаточных напряжений на поверхности надреза и критерию среднеинтегральных остаточных напряжений экспериментально установлено, что соответствующие этим критериям коэффициенты влияния при изгибе и растяжении-сжатии практически одинаковы.
2. Проведённые эксперименты подтвердили выявленную ранее закономерность, что в условиях концентрации напряжений повышение предела выносливости деталей за счёт поверхностного пластического деформирования связано с наличием сжимающих остаточных напряжений, а наклёп не оказывает влияние на сопротивление усталости.
3. Глубина нераспространяющейся трещины усталости при изгибе и растяжении-сжатии, измеренная на выстоявших базу испытаний образцах при напряжениях, равных пределу выносливости, соответствует зависимости, установленной ранее.
4. В исследовании показано, что для прогнозирования предела выносливости при изгибе и растяжении-сжатии упрочнённых ППД деталей в условиях концентрации напряжений представляется возможным использовать вычисленный с учётом эффективного коэффициента концентрации напряжений коэффициент влияния упрочняющей обработки на предел выносливости по критерию среднеинтегральных остаточных напряжений.

#### Список использованных источников

- [1] Иванов С.И., Павлов В.Ф. О влиянии остаточных напряжений и наклёпа на усталостную прочность образцов из стали 45 // Вопросы прочности элементов авиационных конструкций. Куйбышев: КуАИ. 1974. Вып.1. С. 96-100.
- [2] Иванов С.И., Павлов В.Ф. Влияние остаточных напряжений и наклёпа на усталостную прочность // Проблемы прочности. 1976. №5. С. 25-27.

- [3] Иванов С.И., Павлов В.Ф., Прохоров А.А. Влияние остаточных напряжений на сопротивление усталости при кручении в условиях концентрации напряжений // Проблемы прочности. 1988. №5. С. 31-33.
- [4] Вакулюк В.С. Сопротивление усталости детали в зависимости от толщины упрочнённого слоя при опережающем поверхностном пластическом деформировании // Вестник СГАУ, 2012. №3(34). С. 172-176.
- [5] Кирпичёв В.А., Букатый А.С., Чирков А.В. Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочнённых гладких деталей // Известия вузов. Поволжский регион. Технические науки, 2012. №3(23). С. 102-107.
- [6] Богуслав В.А., Муравченко Ф.М. Технологическое обеспечение эксплуатационных характеристик деталей ГТД // Запорожье, 2003.
- [7] Prummer R. Residual stress relief treatment by shock waves / R. Prammer // Metall(Osterr.). 1998 – Vol.52, no. 10-11. P. 633-635.
- [8] Павлов В.Ф. О связи остаточных напряжений и предела выносливости при изгибе в условиях концентрации напряжений // Известия вузов. Машиностроение. 1986. №8. С. 29-32.
- [9] Павлов В.Ф. Влияние на предел выносливости величины и распределения остаточных напряжений в поверхностном слое детали с концентратором. Сообщение I. Сплошные детали // Известия вузов. Машиностроение. 1988. №8. С. 22-26.
- [10] Павлов В.Ф. Влияние на предел выносливости величины и распределения остаточных напряжений в поверхностном слое детали с концентратором. Сообщение II. Полые детали // Известия вузов. Машиностроение. 1988. №12. С. 37-40.
- [11] Павлов В.Ф., Кирпичёв В.А., Вакулюк В.С. Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочнённых деталей по остаточным напряжениям. Самара: Издательство СНЦ РАН, 2012. 125 с.
- [12] Иванов С.И., Павлов В.Ф., Минин Б.В., Кирпичёв В.А., Кочеров Е.П., Головкин В.В. Остаточные напряжения и сопротивление усталости высокопрочных резьбовых деталей. Самара: Издательство СНЦ РАН, 2015. 170 с.
- [13] Биргер И.А. Остаточные напряжения. М.: Машгиз, 1963. 232 с.
- [14] Иванов С.И. К определению остаточных напряжений в цилиндре методом колец и полосок. Остаточные напряжения // Куйбышев: КуАИ. 1971. Вып. 53. С. 32-42.
- [15] Иванов С.И., Григорьева И.В. К определению остаточных напряжений в цилиндре методом снятия части поверхности // Вопросы прочности элементов авиационных конструкций. Куйбышев: КуАИ, 1971. Вып.48. С. 179-183.
- [16] Иванов С.И., Шатунов М.П., Павлов В.Ф. Влияние остаточных напряжений на выносливость образцов с надрезом // Вопросы прочности элементов авиационных конструкций: Межвузовский сборник. Куйбышев: КуАИ, 1974. Вып. 3. С. 88-95.
- [17] Иванов С.И., Шатунов М.П., Павлов В.Ф. Определение дополнительных остаточных напряжений в надрезах на цилиндрических деталях // Вопросы прочности элементов авиационных конструкций: Тру-ды КуАИ. Куйбышев: КуАИ, 1973. Вып. 66. С. 160-170.
- [18] Сазанов В.П., Чирков А.В., Самойлов В.А., Ларионова Ю.С. Моделирование перераспределения остаточных напряжений в упрочнённых цилиндрических образцах при опережающем поверхностном пластическом деформировании // Вестник СГАУ, 2011. №3(27). Ч. 3. С. 171-174.
- [19] Сазанов В.П. Исследование распределения компонентов остаточного напряжённого состояния в области наименьшего сечения поверхностно упрочнённой детали с кольцевым надрезом методом конечно-элементного моделирования // Вестник СГАУ. 2012. № 3(34). С. 158-161.
- [20] Сазанов В.П., Чирков А.В., Семёнова О.Ю., Иванова А.В. Моделирование остаточного напряжённого состояния детали в условиях концентрации напряжений с использованием программного комплекса PATRAN/ NASTRAN // Вестник СамГТУ. Сер.: Тех-нич. науки. 2012. №1 (33). С. 106-114.
- [21] Сазанов В.П., Кирпичёв В.А., Вакулюк В.С., Павлов В.Ф. Определение первоначальных деформаций в упрочнённом слое цилиндрической детали методом конечно-элементного моделирования с использованием расчётного комплекса PATRAN/NASTRAN // Вестник УГАТУ. 2015. Т. 19. №2 (68). С. 35-40.
- [22] Павлов В.Ф., Сазанов В.П., Вакулюк В.С. К вопросу оценки влияния гидродробеструйной обработки на предел выносливости деталей по первоначальным деформациям образца-свидетеля // Вестник ПНИПУ. Машиностроение, материаловедение, 2019. №1. Т. 21. С. 55-62.
- [23] Радченко В.П., Павлов В.Ф. Наибольшая величина сжимающих остаточных напряжений и механические характеристики материала поверхностно упрочнённой детали // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Самара: СамГТУ, 2010. Ч. 1. С. 249-252.
- [24] Радченко В.П., Павлов В.Ф. Наибольшая величина сжимающих остаточных напряжений при поверхностном упрочнении деталей // Труды МНТК «Прочность материалов и элементов конструкций». Киев: ИПП им.Г.С. Писаренко НАНУ. 2011. С. 354-357.
- [25] Серенсен С.В., Когаев В.П., Шнейдерович Р.М. Несущая способность и расчёт деталей машин на прочность. М.: Машиностроение, 1975. 488 с.

**THE INFLUENCE OF HYDRO BLASTING ON THE ENDURANCE LIMIT OF SPECIMENS WITH A CUT UNDER BENDING AND STRETCHING-COMPRESSION**

**Valentin F. Pavlov,  
Viktor A. Kirpichyov,  
Vladimir S. Vakulyuk,  
Vyacheslav P. Sazanov,  
Pavel A. Shlyapnikov**

Samara National Research University  
34, Moskovskoye shosse, Samara,  
443086, Russian Federation

pavlov.vf@ssau.ru

*The hydro blasting influence on an endurance limit of cylindrical specimens with circular cuts of a semicircular profile of 0,3 mm radius under bending and stretching-compression in a case of symmetric cycle has been examined. Specimens of 10 mm diameter for fatigue tests were made of steels 30ХГСА, 12Х18Н10Т, ЭИ961,45 and aluminum alloys В93, Д16Т. The influence of surface hardening on an endurance limit of specimens with cuts was valuated by two criteria: residual stresses on the concentrator surface and the average integral residual stresses calculated through the part's dangerous section surface layer thickness equal the critical depth of a non-propagating fatigue crack.*

*On results of residual stresses and specimens with cuts endurance limits determination it's been stated that coefficients of surface hardening influence on an endurance limit increase under bending and stretching-compression by two criteria are approximately equal. Besides, the coefficient of the influence by the average integral residual stresses criterion changes within essentially lesser limits than the coefficient of the influence by the residual stresses on the concentrator surface criterion. So the average integral residual stresses criterion should be used for the evaluation of a surface hardening influence on an endurance limit of parts with concentrators.*

*On an example of specimens within and without peening in a dangerous section it's been shown that peening doesn't influence the endurance limit of a surface hardened part. The compressive residual stresses only influence the endurance limit of these parts.*

**Keywords:** *hydro blasting, specimen with a cut, endurance limit, bending, stretching-compression, symmetric cycle, residual stresses, critical depth of a non-propagating fatigue crack, average integral residual stresses criterion.*

## References

- [1] Ivanov, S.I., Pavlov, V.F., (1974) O vliyaniy ostatochnykh napryazhenij i naklepa na ustalostnuyu prochnost' obratztov iz stali 45 [On residual stresses and peening influence on fatigue resistance of specimens made of steel 45]. Voprosy prochnosti elementov aviacionnykh konstrukcij. Kujbyshev: KuAI [Problems of aircraft constructions elements strength. Kuibyshev Aviation Institute], issue 1, pp. 96-100. (in Russian).
- [2] Ivanov, S.I., Pavlov, V.F., (1976) Vliyanie ostatochnykh napryazhenij na ustalostnuyu prochnost' [Residual stresses influence on fatigue strength]. Problemy prochnosti [Strength problems], no. 5, pp. 25-27. (in Russian).
- [3] Ivanov, S.I., Pavlov, V.F., Prokhorov, A.A., (1988) Vliyanie ostatochnykh napryazhenij na soprotivlenie ustalosti pri kruchenii v usloviyah koncentracii napryazhenij [Residual stresses influence on fatigue resistance under torsion in stresses concentration conditions]. Problemy prochnosti [Strength problems], no. 5, pp. 31-33. (in Russian).
- [4] Vakulyuk, V.S., (2012) Soprotivlenie ustalosti detali v zavisimosti ot tolshchiny uprochnyonnogo sloya pri ope-rezhayushchem poverhnostnom plasticheskom deformirovanii [Fatigue resistance of a part depending on surface layer thickness under outstripping superficial plastic deforming]. Vestnik SGAU [Samara State Aerospace University bulletin], no.3 (34), part 1, pp. 172-176. (in Russian).
- [5] Kirpichyov, V.A., Bukaty, A.S., Chirkov, A.V., (2012) Prognozirovaniye soprotivleniya ustalosti poverhnostno up-rochnyonnykh gladkih detalej [Surface hardened smooth parts fatigue resistance prediction]. Izvestiya vuzov. Povolzhskij region. Tekhnicheskie nauki [Universities News, Technical Sciences], no.3 (23), pp. 102-107. (in Russian).
- [6] Boguslaev V.A., Muravchenko F.M. (2003) Engineering Support of Operational Features of Turbine Engine Pieces, Zaporozhe.
- [7] Prummer R. Residual stress relief treatment by shock waves / R. Prammer // Metall(Osterr.). 1998 – Vol.52, no. 10-11. P. 633-635.

[8] Pavlov, V.F., (1986) O svyazi ostatochnykh napryazhenij i predela vynoslivosti pri izgibe v usloviyah koncentracii napryazhenij [On connection between residual stresses and endurance limit under bending in stresses concentration conditions]. Izvestiya vusov. Mashinostroeniye [Universities News. Mechanical Engineering], no. 8, pp. 29-32. (in Russian).

[9] Pavlov, V.F., (1988) Vliyanie na predel vynoslivosti velichiny i raspredeleniya ostatochnykh napryazhenij v pover-hnostnom sloe detali s koncentratorom. Soobshchenie I. Sploshnye detali [The influence of residual stresses in a part with a concentrator surface layer value and distribution on the endurance limit. Report 1. Solid parts]. Izvestiya vusov. Mashinostroeniye [Universities News. Mechanical Engineering], no. 8, pp. 22-26. (in Russian).

[10] Pavlov, V.F., (1988) Vliyanie na predel vynoslivosti velichiny i raspredeleniya ostatochnykh napryazhenij v pover-hnostnom sloe detali s koncentratorom. Soobshchenie II. Polye detali [The influence of residual stresses in a part with a concentrator surface layer value and distribution on the endurance limit. Report 2. Hollow parts]. Izvestiya vusov. Mashinostroeniye [Universities News. Mechanical Engineering], no. 12, pp. 37-40. (in Russian).

[11] Pavlov, V.F., Kirpichev, V.A., Vakulyuk, V.S., (2012) Prognozirovaniye soprotivleniya ustalosti poverhnostno up-rochnyonykh detaley po ostatochnym napryazheniyam [The prediction of surface hardened parts fatigue resistance by residual stresses]. Samara: Izdatel'stvo SNC RAN [Samara: Samara scientific center. Publishing House of the Russian Acad-emy of Sciences], 125 pp. (in Russian).

[12] Ivanov, S.I., Pavlov, V.F., Minin, B.V., Kirpichev, V.A., Kocherov, E.P., Golovkin, V.V., (2015) Ostatochnye napryazheniya i soprotivlenie ustalosti vysokoprochnykh rez'bovykh detaley [Residual stresses and fatigue resistance of high-strength threaded parts]. Samara: Izdatel'stvo SNC RAN [Samara: Samara scientific center. Publishing House of the Russian Academy of Sciences], 170 pp. (in Russian).

[13] Birger, I.A., (1963) Ostatochnye napryazheniya [Residual stresses]. M.: Mashgiz [Moscow, State Publishing House of Engineering Literature], 232 pp. (in Russian).

[14] Ivanov, S.I., (1971) K opredeleniyu ostatochnykh napryazhenij v cilindre metodom kolec i polosok. Ostatochnye napryazheniya [On determination of residual stresses in cylinder by rings-and-stripes method. Residual stresses]. Kuiby-shev: KuAI [Kuibyshev Aviation Institute], issue 53, pp. 32-42. (in Russian).

[15] Ivanov, S.I., Grigoryeva, I.V., (1971) K opredeleniyu ostatochnykh napryazhenij v cilindre metodom snyatiya chasti poverkhnosti [On determination of residual stresses in a cylinder by removing a part of surface]. Voprosy prochnosti elementov aviacionnykh konstrukcij. Kujbyshev: KuAI [Problems of aircraft constructions elements strength. Kuibyshev Aviation Institute], issue 48, pp.179-183. (in Russian).

[16] Ivanov, S.I., Shatunov, M.P., Pavlov, V.F., (1974) Vliyanie ostatochnykh napryazhenij na vynoslivost' obrazcov s nadrezom [The influence of residual stresses on the endurance of notched specimens]. Voprosy prochnosti elementov aviacionnykh konstrukcij. Kujbyshev: KuAI [Problems of aircraft constructions elements strength. Kuibyshev Aviation Institute], issue 3, pp. 88-95. (in Russian).

[17] Ivanov, S.I., Shatunov, M.P., Pavlov, V.F., (1973) Opredeleniye dopolnitel'nykh ostatochnykh napryazhenij v nadrezah na cilindricheskikh detalyah [The determination of additional residual stresses in cuts on cylindrical parts]. Voprosy prochnosti elementov aviacionnykh konstrukcij. Kujbyshev: KuAI [Problems of aircraft constructions elements strength. Kuibyshev Aviation Institute], issue 66, pp. 160-170. (in Russian).

[18] Sazanov, V.P., Chirkov, A.V., Samoylov, V.A., Larionova, Yu.S., (2011) Modelirovaniye pereraspredeleniya ostat-ochnykh napryazhenij v uprochnyonykh cilindricheskikh obrazcah pri operezhayushchem poverhnostnom plasticheskom deformirovani [Modeling of residual stresses redistribution in hardened cylindrical specimens under outstripping superficial plastic deforming]. Vestnik SGAU [Samara State Aerospace University bulletin] no. 3 (27), part 3, pp. 171-174. (in Russian).

[19] Sazanov, V.P., (2012) Issledovaniye raspredeleniya komponentov ostatochnogo napryazhyonnogo sostoyaniya v oblasti naimen'shego secheniya poverhnostno uprochnyonomj detali s kol'cevyim nadrezom metodom konechno-ehlementnogo modelirovaniya [The study of residual strain state components distribution in the area of the smallest section of a surface hardened part with a circular cut by the finite elements modeling method]. Vestnik SGAU [Samara State Aerospace University bulletin], no. 3 (34), pp. 158-161. (in Russian).

[20] Sazanov, V.P., Chirkov, A.V., Semenova, O.Yu., Ivanova, A.V., (2012) Modelirovaniye ostatochnogo napryazhy-onnogo sostoyaniya detali v usloviyah koncentracii napryazhenij s ispol'zovaniem programmnoho kompleksa PATRAN/ NASTRAN [The residual strain state of parts modeling under stress concentration conditions using the calculation program complex NASTRAN/PATRAN]. Vestnik SamGTU [Samara State Technical University bulletin. Part: technical sciences], no. 1 (33), pp. 106-114. (in Russian).

[21] Sazanov, V.P., Kirpichev, V. A., Vakulyuk, V.S., Pavlov, V.F., (2015) Opredeleniye pervonachal'nykh deformacij v uprochnyonom sloe cilindricheskoj detali metodom konechno-ehlementnogo modelirovaniya s ispol'zovaniem raschy-otnogo kompleksa PATRAN/NASTRAN [The determination of initial deformations in the surface layer of a cylindrical part by the finite elements modeling method with use of the calculation program complex PATRAN/NASTRAN]. Vestnik UGATU [Ufa State Aviation Technical University bulletin], vol. 19, no. 2 (68), pp. 35-40. (in Russian).

[22] Pavlov, V.F., Sazanov, V.P., Vakulyuk, V.S., (2019) К вопросу отенки vliyaniya hidrodobestruynoy obrabotki na predel vynoslivosti detaley po pervonachal'nym deformatsiyam obraztza-svidetelya [On hydro blasting influence on the endurance limit of parts by initial deformations of a reference specimen]. Vestnik PNIPU. Mashinostroenie, materi-alovedenie [Perm' national research polytechnic university bulletin. Mechanical Engineering, Materials technology], no.1, vol. 21, pp. 55-62. (in Russian).

[23] Radchenko, V.P., Pavlov, V.F., (2010) Naibol'shaya velichina sjimayutschikh ostatochnyh napryazhenij i mekhanicheskie kharakteristiki materiala poverkhnostno uprochnyonnoj detali [Maximum value of compressive residual stresses and mechanical characteristics of a surface hardened part's material]. Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi. Trudy sed'moj Vserossijskoj nauchnoj konferencii s mezhdunarodnym uchastiem. Samara: SamGTU [Mathematical modeling and boundary-value problems. Proceedings of the seventh All-Russian scientific conference with international participation. Samara: Samara State Technical University], part. 1, pp. 249-252. (in Russian).

[24] Radchenko, V.P., Pavlov, V.F., (2011) Naibol'shaya velichina sjimayutschich ostatochnyh napryazhenij pri poverkhnostnom uprochnenii detalej [The maximum of compressive residual stresses under surface hardening of parts]. Trudy MNTK «Prochnost' materialov i elementov konstrukcij». Kiev: IPP im.G.S. Pisarenko NANU [Proceedings of the International Scientific Technical Conference "Strength of materials and structural elements". Kiev: The G.S. Pisarenko Strength Problems Institute of the Ukraine Academy of Sciences], pp. 354-357. (in Russian).

[25] Serensen, S.V., Kogayev, V.P., Shneyderovich, R.M., (1975) Nesutchaya sposobnost' i raschet detaley mashin na prochnost' [Carrying capacity and strength analysis of machine elements]. Moscow: Machinostroyeniye (Mechanical Engi-neering), 488 pp. (in Russian).

Р.А. Сунарчин

Санкт-Петербургский  
 Политехнический университет  
 Петра Великого  
 Политехническая, 29,  
 г. Санкт-Петербург,  
 Российская Федерация  
 195251

[sunar1939@mail.ru](mailto:sunar1939@mail.ru)

П.В. Петров

Уфимский государственный  
 авиационный  
 технический университет,  
 Карла-Маркса, 12  
 г. Уфа, Респ. Башкортостан,  
 Российская Федерация  
 450000

[pgl.petrov@mail.ru](mailto:pgl.petrov@mail.ru)

## АВТОКОЛЕБАНИЯ МАЯТНИКА ФРУДА (ЧИС- ЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ)

*Представлено численное исследование автоколебаний фрикционного маятника Фруда. Для сравнения с приближенным аналитическим или графическим решениями в качестве одной из аппроксимаций характеристики трения принята кубическая аппроксимация; показаны изменения в случае других аппроксимаций.*

*По результатам проведенного вычислительного эксперимента были построены характеристики амплитуды автоколебаний от безразмерных коэффициентов, комплексов подобия, которые показали сходимость расчетных и фактических (полученных при численном интегрировании) значений амплитуд автоколебаний для малых значений трения и крутизны характеристики; при увеличении момента амплитуды также увеличиваются.*

*Отмечено, что результаты компьютерного моделирования будут существенно зависеть от конструкции, технологии изготовления и условий эксплуатации рассматриваемого устройства.*

**Ключевые слова:** численные методы; автоколебания; нелинейная модель; сила сухого трения

### 1 Введение

В расчетной практике наибольшее распространение получили достаточно удобные линейные модели. Однако они, во-первых, описывают действительные физические явления приближенно, а, во-вторых, что еще более важно, многие физические явления буквально исчезают при малейшей попытке их линеаризации. Автоколебания – как раз тот случай, только случае учета нелинейностей в механизмах подвода и стока энергии возможно определить установившиеся стационарные колебания, предельный цикл.

Маятник Фруда с одной стороны является типичным автоколебательным устройством, имеющим все элементы автоколебательных систем, а с другой – имеет существенную особенность: движущей силой является сила контактного трения, являющаяся весьма

нестабильной и зависящей от многих факторов и условий эксплуатации.

Исследование механических автоколебательных систем, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка, обычно выполняется приближенными аналитическими или графическими методами; и те и другие являются весьма приближенными и трудоемкими.

Численные методы, в отличие от аналитических, позволяют исследовать специфические особенности физических процессов, конструктивные особенности устройств и влияние внешних условий, т.е. выполнять наиболее полное имитационное моделирование систем.

В последнее время произошел существенный скачок в развитии средств вычислительной техники. Выросла производительность современных компьютеров, и вместе с тем появился

целый ряд программных продуктов – специализированных математических пакетов, способных решать задачи практически любой сложности. Одновременно с этим, появляется понятие численного эксперимента, т. е. численного решения поставленной задачи при помощи вычислительных средств с использованием встроенных в математические пакеты функций дифференцирования, интегрирования и др.

Маятник Фруда описывается дифференциальным уравнением второго порядка, численное решение короткого не представляет особых трудностей.

## 2 Постановка задачи

Рассмотрим фрикционный маятник с одной степенью свободы, рис.1. Маятник 1 прикреплен к муфте, насаженный на вал 2, вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . Механизм возбуждения колебаний связан с падающей характеристикой силы сухого трения между трущимися поверхностями вала и муфты маятника [1-5].

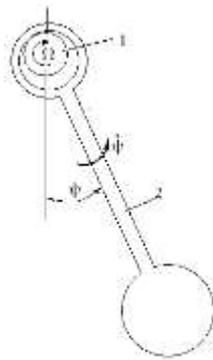


Рисунок 1. Фрикционный маятник  
1 - Вал; 2 - Маятник

Это сравнительно сложное неоднозначное техническое устройство. Посадка вала и муфты – свободная, с каким-то зазором (на рисунке место сочленения показано с утрированным зазором) и другими особенностями. Но наибольшую неопределенность вносит сила фрикционного трения, которая в данном случае является движущей, что существенно

осложняет ситуацию, так как, несмотря на то, что Леонардо да Винчи еще в 1500 году поставил пять замечательных вопросов о влиянии некоторых факторов на эту силу, а Кулон правильно на них ответил, еще много вопросов остаются не разрешенными, кроме того протекание характеристики трения от относительной скорости скольжения муфты маятника и вала зависит от материалов муфты и вала, от наличия или отсутствия смазки, от технологии изготовления пары, от внешних условий и т. д. и не ясно, какой из этих факторов в данной ситуации и в данное время окажется наиболее значимым. В свое время в одном из агрегатных конструкторских бюро было изготовлено гидромеханическое вычислительное устройство, где передача движения осуществлялась трением смежных деталей, работа устройства оказалась такой не стабильной и не предсказуемой, что от него пришлось отказаться.

Публикации по маятнику Фруда [1-6] условно можно разделить на: линеаризованные, с представлением момента трения в виде полинома третьей степени, численные и экспериментальные.

В первом случае выражение для момента трения раскладывают в ряд Тейлора, вблизи значения скорости вращения вала и ограничиваются первым членом разложения. Уравнение движения маятника становится линейным, а суммарный коэффициент при первой производной может стать либо отрицательным (отрицательное сопротивление) и тогда решение будет расходящимся, или положительным и тогда система устойчива; в любом случае предельный цикл, а значит и автоколебания отсутствуют.

Во втором случае [1, 2] применяется представление характеристики трения маятника в виде полинома третьей степени, подобно той которую предложил Ван дер Поль для математического анализа генератора электромагнитных колебаний. Поразительно изящная, изощренная аппроксимация характеристики гораздо точнее и вернее отображает реальный

процесс, чем теория, предполагающая линейную зависимость, и позволяет описать процесс установления автоколебаний.

Совершенствование аппаратных средств и математического обеспечения привели к существенному прогрессу в части решений дифференциальных уравнений; теперь даже не очень опытный пользователь с использованием пакетов прикладных программ может решать задачи, которые ранее были доступны лишь опытным программистам. Если раньше стремились получить решение в символьном виде, то в настоящее время основное значение приобретает чёткая аналитическая формулировка задачи и реализуемость её на ЭВМ. Это главное отличие моделирования под компьютер, а в остальном все этапы аналитического и численного моделирования совпадают: постановка задачи исследования, допущения, составление уравнений, проверки на всех этапах и т. д.

В остальном все этапы аналитического и численного моделирования совпадают: постановка задачи исследования, допущения, составление уравнений, проверки на всех этапах и т. д. К сожалению, некоторые исследователи безосновательно уверовали, что современный персональный компьютер позволяет за несколько секунд решить любую сложную задачу, например, рассмотрим работу [5], где решается ряд физических задач с помощью пакета прикладных программ *Mathcad*: начнем с того, что в приведенных исходных данных всех задач отсутствует размерность (кстати *Mathcad* позволяет производить несложные математические преобразования с размерностями), предположим, что по умолчанию здесь принята система СИ, далее мы не поленились и, с использованием авторской копии-экрана, набрали программу 13.MCD, посвященную как раз маятнику Фруда; автоколебаний не наблюдается, если же принять коэффициент вязкого трения нулю, то в точности воспроизводится авторский график автоколебаний, но что это за автоколебания – амплитуда перемещения

200 (чего метров или радиан?), скорость колебаний достигает 20 (м/с или рад/с?), модель не выдерживает малейшей проверки на правдоподобность, можно отметить множество других промахов. И наконец, разве можно считать численное исследование законченным после получения однократного решения, где критическая оценка решения и вычислительный эксперимент? В защиту автора этой работы отметим, что моделирование маятника Фруда, являющегося относительно сложным техническим устройством, как и прочих автоколебательных устройств, особенно где имеется сухое трение, является очень непростой задачей. Очень легко критиковать любую модель, трудно создать что-то адекватное действительности, для этого, в первую очередь, следовало бы выполнить целенаправленное системное экспериментальное исследование.

Вопросы автоколебаний и методы их исследования достаточно подробно изложены в работах таких авторов как Харкевич А.А., Андронов А.А., Хайкин С.Э., Пановко Я.Г., Каннингхэм В., Блехман И.И. и др. Но несмотря на большое количество научных трудов, в этих работах очень мало результатов экспериментов, посвященных колебаниям механических систем. К примеру, у Т. Хаяси [7] каждый раздел сопровождается экспериментами, но ведь он электрик и примеры у него сплошь электрические, уж механики должны знать, где находится критерий истины. Нашлась лишь одна работа [6], посвященная экспериментальному исследованию маятника Фруда: ключевым вопросом в данном механизме является устройство и организация подшипника скольжения, однако кроме того, что перед проведением опытов его промывают спиртом и предохраняют от попадания смазки никаких подробностей не изложено. В качестве пожеланий к этой работе следует отметить малую универсальность результатов и отсутствие современных цифровых средств измерения и регистрации, которые в

настоящее время стали на удивление доступными и сравнительно не дорогими.

### 3 Компьютерное моделирование и численное исследование автоколебаний

Представленное в статье численное исследование намного правдоподобнее, чем в [5], но построено также лишь на логических рассуждениях и также не может претендовать на окончательное решение.

Механизм автоколебаний маятника Фруда в общих чертах можно представить в следующем виде: так как изменение скорости маятника близко к синусоидальному, то опираясь на падающую характеристику трения можно построить осциллограмму момента, которая будет состоять из некоторой постоянной  $M_0$  и синусоидальной  $\tilde{M}\sin(\omega t + \pi)$  составляющих, причем положительные значения синусоиды совпадают с попутным движением, а отрицательные с противоположными движениями маятника и вала. Поэтому за полупериод, за который вал и маятник идут в одну сторону, момент трения вала о муфту помогает колебаниям маятника, работа момента трения увеличивает энергию колебаний маятника. За следующий полупериод, когда вал и маятник вращаются в разные стороны, скорость скольжения больше, а работа момента трения, отнимающая энергию у маятника, будет меньше. За целый период вал передает энергию маятнику и увеличивает амплитуду колебаний. Амплитуда колебаний будет нарастать до тех пор, пока не наступит насыщение генерации и (или) возрастут потери энергии; в случае баланса энергий наступят автоколебания.

Пусть характеристика момента трения  $M_{тр}(\Omega - \dot{\Psi})$  в зависимости от относительной угловой скорости  $(\Omega - \dot{\Psi})$  известна, тогда дифференциальное уравнение движения примет вид:

$$mL^2\ddot{\psi} = -mgL\sin(\psi) - k_{M\dot{\psi}}\dot{\psi} + M_{тр}(\Omega - \dot{\psi}), (1)$$

По аналогии с [2] представим характеристику трения в зависимости от

скорости маятника  $\dot{\psi}$  в виде полинома третьей степени (2).

$$M_{тр}(\dot{\psi}) = M_0 + S_0 \left( \dot{\psi} - \frac{\dot{\psi}^3}{3k^2} \right) \quad (2)$$

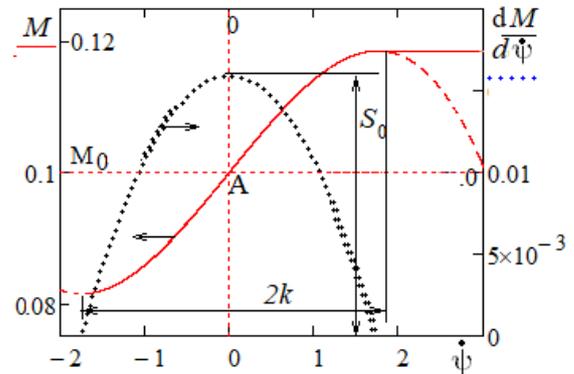


Рисунок 2. Аппроксимация полиномом 3-ей степени

Там же показаны производная этой функции (жирные точки) и ее значение (крутизна характеристики)  $S_0 = \left( \frac{dM}{d\dot{\psi}} \right)$  в рабочей точке А, где скорость маятника равна нулю  $\dot{\psi} = 0$ , а момент равен  $M_0$ . Зависимость момента трения от скорости обычно имеет вид, показанный на рис.2 жирной линией, аппроксимация вне пределов зоны насыщения  $\approx 2k$  показана на рис.2 пунктиром.

Выполнено численное интегрирование уравнения (1) для двух случаев протекания характеристики трения. На рис.3 (см. также Приложение\_1) принята характеристика момента (рис. 3а) в виде полинома третьей степени, рассчитанной по формуле (2); на фазовой характеристике (рис.3в) имеется устойчивый предельный цикл, к которому стягиваются все фазовые траектории вне зависимости от начальных условий; амплитуда автоколебаний при приведенных на рис.3 параметрах равна  $A_{числ} = 0,589$  рад, что примерно соответствует ее расчетному значению

$$A_{расч} = \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\frac{S_0}{\frac{3S_0}{3(2k)^2}}} = 0,559 \text{ рад}$$

(см.[2]).

Параметры, принятые при расчете характеристик, представленных на рис. 3.

$$m = 2 \text{ кг}; L = 0,25 \text{ м}; \Omega = 6,28 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$M_0 = 0,1 \text{ Нм}; k_v = 0; k = 0,875.$

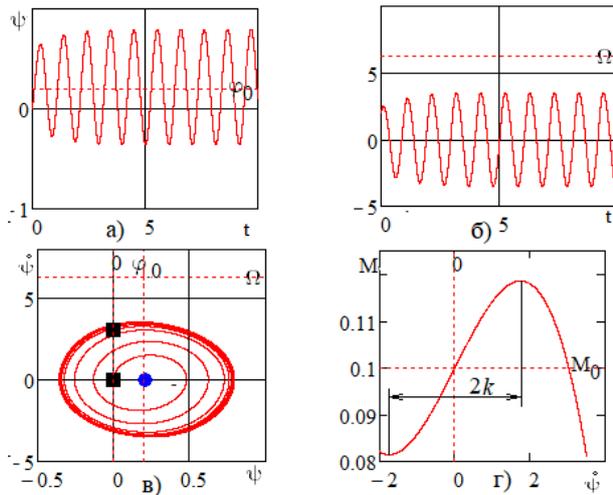


Рисунок 3. Результаты интегрирования с аппроксимацией в виде кубического полинома  
а) угловое перемещение; б) угловая скорость; в) фазовые диаграммы для различных начальных условий; г) момент

Колебания в широком диапазоне параметров имеют гармонический характер (рис.4), а период для параметров к рис.3 равен  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1,003 \text{ с}$ ; колебания перемещения сдвинуты на угол  $\psi_0 = \text{asin}\left(\frac{M_0}{mgl}\right) = 0,205 \text{ рад}$ .

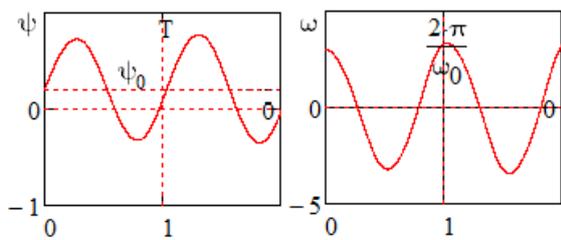


Рисунок 4. Форма автоколебаний

При интегрировании уравнения (1), результаты которого представлены на рис.5, момент трения рассчитывался по следующему выражению

$$M_{\text{тр}} = \begin{cases} \text{if } \psi < \psi_B & M_{\text{тр}}(\psi) = M_0 + S_0 \left( \psi - \frac{\psi^3}{3k^2} \right) \\ \text{иначе} & M_{\text{тр}}(\psi) = M_B \end{cases} \quad (3)$$

Такая аппроксимация, как утверждает в [1], более соответствует действительности. В работе [2] декларируется зависимость момента трения как на рис.5б, а все расчеты выполняются с кубической аппроксимацией,

показанной на рис.3г. Параметры при расчетах принимались те же, что для построения характеристик представленных на рис.3.

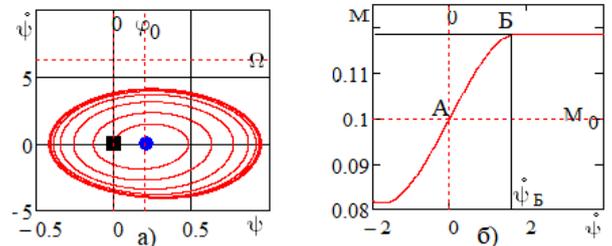


Рисунок 5. Результаты интегрирования с аппроксимацией по формуле (3)  
а) фазовая диаграмма; б) момент трения

Фазовая характеристика, представленная на рис. 5а – похожа на предыдущую, но амплитуда предельного цикла ее несколько больше  $\approx 0,741$  радиан. Максимальная скорость маятника, вопреки утверждениям [3], при всех вариациях параметров не достигает скорости вращения вала; при увеличении коэффициента вязкого трения сначала амплитуда уменьшается, а затем фазовая характеристика вырождается в устойчивый фокус, маятник по аperiodическому закону стремится в точку  $\Psi_0$  и становится неподвижным.

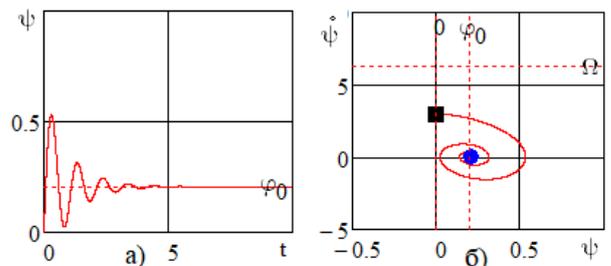


Рисунок 6. Переходные процессы при большом вязком трении ( $k_{M\psi} = 0,04 \frac{\text{Нм}}{\text{рад/с}}$ )

В обоих случаях расчетные предельные циклы имеют форму практически правильного эллипса. В работе [6] на экспериментальной фазовой диаграмме в районе нейтрального положения (и максимальной скорости) имеется скачок скорости и утверждается, что это свидетельство одномоментного подвода энергии от вала к маятнику. Позволим себе

не согласиться с этим: такая ситуация характерна для импульсного подвода энергии, например, в часах, здесь же все характеристики протекают плавно без разрывов. По-видимому, этот злополучный скачок обусловлен локальной шероховатостью либо иной особенностью экспериментальной установки.

Величина амплитуды автоколебаний, полученная в результате расчетов по формуле (1), увеличивается с ростом момента  $M_0$ , крутизны характеристики  $S_0$  и ширины зоны насыщения  $2k$ , но уменьшается с ростом коэффициента сопротивления  $k_{M\psi}$ . Результаты расчетов можно усилить, если перейти к безразмерным переменным, тогда можно представлять результаты в зависимости от безразмерных комплексов, критериев подобия, в самой структуре которых отражена сущность физических процессов, протекающих в рассматриваемом устройстве. Вводится безразмерное время  $\tau = \omega_0 t$  и каждый член уравнения (1) делится на  $mgL$

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \bar{k}_{M\psi} \frac{d\psi}{d\tau} + \sin \psi = \bar{M}_0 + \bar{S}_{01} \frac{d\psi}{d\tau} - \bar{S}_{02} \left(\frac{d\psi}{d\tau}\right)^3, \quad (4)$$

$$\text{где } \bar{k}_{M\psi} = \frac{k_{M\psi}\omega_0}{mgL}; \quad \bar{M}_0 = \frac{M_0}{mgL}; \quad \bar{S}_{01} = \frac{S_0\omega_0}{mgL};$$

$$\bar{S}_{02} = \frac{S_0}{3(2k)^2 mgL}; \quad (5)$$

Выполнен численный эксперимент, в результате которого построены характеристики рис.6 амплитуд автоколебаний от безразмерных комплексов (5); каждый коэффициент представляет собой меру различных сил относительно возвращающей гравитационной силы, а зависимости – обобщенные характеристики автоколебаний. На рис.6в также приведена аналитическая зависимость (жирная сплошная линия), рассчитанная по формуле

$$A = \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\frac{S_0 - K_{M\psi} / (mgL)}{\frac{S_0}{3(2\Delta\phi)^2}}}, \text{ которая заимствована}$$

из [2]; видно, что для малых значений относительного трения ( $\bar{M}_0 = 0,204$ )

расчетные и фактические (полученные при интегрировании) значения амплитуд автоколебаний совпадают; при увеличении момента амплитуды автоколебаний несколько увеличиваются; с ростом сопротивления амплитуды, естественно, уменьшаются.

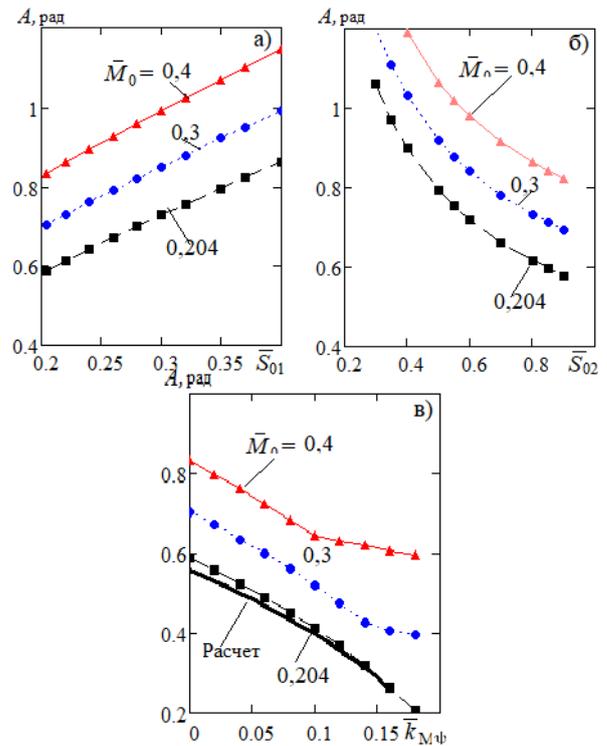


Рисунок 7. Обобщенные характеристики автоколебаний

#### 4 Заключение

В заключении еще раз отметим, что в тех устройствах, где силы сухого трения соизмеримы или тем более, как в данном устройстве являются ведущими, может наблюдаться существенная неустойчивость характеристик, зависящая от конструкции, технологии изготовления, условий эксплуатации и пр. Поэтому до математического моделирования и вообще проектирования желательно выполнить эксперимент, лучше натурный, а если лабораторный, то с максимально соответствующим натуре узлом фрикционного трения.

Проведенное исследование можно считать начальным этапом большой работы,

связанной с изучением особенностей физических процессов в механических системах, потому как таких особенностей много и каждое нуждается в тщательном рассмотрении. Также работа осложняется отсутствием, либо наличием сложных комплексных физико-математических описаний многих явлений, необходимых для моделирования сложных систем.

#### Список использованных источников

- [1] Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. Изд. 2-е, перераб., М.: Наука, 1964, 437 с.
- [2] Алишкевич В. А., Деденко Л. Г., Караваев В. А. Колебания и волны. Лекции. (Университетский курс общей физики). – М.: Физический факультет МГУ, 2001. – 144 с.
- [3] Магнус К. Колебания: Введение в исследование колебательных систем. Пер. с нем. – М.: Мир, 1982. – 304 с., ил.
- [4] Каудерер Г. Нелинейная механика. Пер. с нем. Пановко Я. Г. Изд. «Иностранная литература», 1961, 777 с.

- [5] Майер Р. В. Решение физических задач с помощью пакета MathCAD [Электронный ресурс]/ Р. В. Майер. – Глазов: ГГПИ, 2006. – 37 с.
- [6] Молотков Н. Я., Ломакина О. В. Исследование механической автоколебательной системы. ГОУ ВПО «ТГТУ»; tol-mat@nnn.tstu.ru
- [7] Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. Издательство «МИР», Москва, 1968.

**Robert A. Sunarchin**

Peter the Great St.Petersburg  
Polytechnic University  
29, Polytechnicheskaya,  
St.Petersburg, Russian Federation  
195251  
sunar1939@mail.ru

**Pavel V. Petrov**

Ufa state aviation University  
technical University, Karl-Marx, 12  
Ufa, Republic of Bashkortostan,  
Russian Federation  
450000  
pgl.petrov@mail.ru

### Self-oscillation of the Froude pendulum (Numerical study)

*A numerical study of the self-oscillation of the Froude friction pendulum is presented. For comparison with approximate analytical or graphical solutions, the cubic approximation is used as one of the approximations of the friction characteristic; changes in the case of other approximations are shown.*

*By results of the conducted computational experiment was built characteristics of the amplitude of self-oscillations from dimensionless ratios, complexes of similarity, which showed the convergence of the estimated and actual (obtained by numerical integration) values of the amplitudes of oscillation for small values of friction and slope characteristics; if you increase the moment amplitude is also increased.*

*It is noted that the results of computer modeling will significantly depend on the design, manufacturing technology and operating conditions of the device in question.*

**Keywords:** numerical methods; self-oscillation; nonlinear model; dry friction force

### References

- [1] Strelkov S. p. Introduction to the theory of vibrations. 2nd Ed., Moscow: Science, 1964, 437 p.
- [2] Aleshkevich V. A., Dedenko L. G., Karavaev V. A. Vibrations and waves. Lectures. ((University course in General physics). Moscow: faculty of Physics, Moscow state University, 2001, 144 p.
- [3] Magnus K. Vibrations: an Introduction to the study of vibrational systems. TRANS. from German-M.: Mir, 1982. - 304 p.
- [4] Kauderer G. Nonlinear mechanics. TRANS. with him. Panovko Ya. G. Ed. "Foreign literature", 1961, 777 p.
- [5] Mayer R. V. Solving physical problems using the MathCAD package [Electronic resource] / R. V. Mayer. – Glazov: ggpi, 2006. - 37 p.
- [6] Molotkov N. Ya., Lomakina O. V. Research of mechanical self-oscillating systems. GOU VPO "TSTU"; tolmt@nnn.tstu.ru
- [7] Hayashi T. Nonlinear oscillations in physical systems. MIR publishing house, Moscow, 1968.

**ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ МАГНИТО-РЕОЛОГИЧЕСКОГО ЭЛАСТОМЕРА ДЛЯ ВИБРО-ИЗОЛЯЦИИ В ВАКУУМЕ**

**А.М. Базиненков,  
Д.А. Иванова,  
И.А. Ефимов,  
А.П. Рогарь**

МГТУ им. Н.Э. Баумана  
Ул. 2-я Бауманская, д.5 стр.1,  
Москва  
105005  
ambazinenkov@bmstu.ru

*Магнитореологический эластомер применяется в системах виброизоляции и амортизации, перспективным является использование платформы активной виброизоляции в вакууме для обеспечения вибрационной защиты объекта исследований. Полимер является композитным материалом, реологические свойства которого могут изменяться под действием направленного магнитного поля. Для корректной работы платформы необходимо постоянство механических свойств, которые могут изменяться при обезгаживании с повышением температуры. В работе представлены результаты исследований механических свойств МРЭ с различным составом до обезгаживания в вакууме. Установлено, что модуль упругости полимера напрямую зависит от концентрации частиц наполнителя, зависимости от наличия ПАВ не обнаружено.*

**Ключевые слова.** Система активной виброизоляции; магнитореологический эластомер; модуль упругости; механические свойства; деформация; вакуумная камера

**1 Введение**

В вакууме проводятся технологические процессы, испытания и исследования, с использованием высокоточных измерительных и технологических приборов. Для повышения точности проводимых исследований и защиты оборудования необходимо использование систем виброзащиты в вакууме.

Сотрудниками кафедры Электронные технологии в машиностроении МТ11 МГТУ им. Н.Э. Баумана ведется разработка платформы активной виброизоляции, в конструкции которой имеется 4 демпфера, рабочим телом которых являются диски МРЭ (рисунок 1) [1]. Перемещение верхней плиты с защищаемым объектом виброизолирующей платформы осуществляется за счёт деформации МРЭ под действием направленного магнитного поля.



Рисунок 1. Общий вид платформы без верхней крышки и твердотельная модель демпфера в разрезе

Магнитореологический эластомер (МРЭ) – полимерный материал, наиболее широко применяемый в системах виброизоляции и амортизаторах. Под действием направленного магнитного поля происходит деформация полимера и перемещение объекта, таким образом реализуется полуактивная виброизоляция. На сегодняшний день предполагается возможным использование систем виброизоляции на основе МРЭ в вакууме, для повышения точности проводимых испытаний и исследований.

Таким образом, необходимо знать, как будут изменяться механические свойства МРЭ при обезгаживании в вакууме и повышении температуры. В ходе настоящей работы были рассмотрены различные составы

полимера и изучены их механические свойства до помещения в вакуум.

## 2 Механические свойства МРЭ при повышении температуры

На сегодняшний день проведено большое количество исследований по изучению изменения механических свойств, под действием направленного магнитного поля и без него, при различных температурах. В 2015 году Б. Джу и др. [2] проводили испытания по исследованию влияния высоких температур на механические свойства. В результате чего, было выявлено, что при наличии внешнего магнитного поля происходит увеличение магнитореологического эффекта с увеличением температуры, это можно объяснить увеличением свободы частиц наполнителя, что позволяет им более свободно перемещаться и ориентироваться по направлению действующего магнитного поля.

Наиболее хорошо видно увеличение модуля упругости у изотропных образцов МРЭ при температуре свыше  $50^{\circ}\text{C}$  [2]. Однако, при повышении температуры фиксируется неблагоприятный факт, образцы после длительно пребывания в условиях повышенных температур, после приложения внешней нагрузки длительное время не восстанавливают свою форму, при низких нагрузках данный процесс обратим, с повышением температуры образцы возвращают форму. Также, было замечено, что без приложения внешнего магнитного поля, модуль упругости с повышением температуры волнообразно снижается, относительно начального значения.

Сформированные данные являются неблагоприятными для использования материала при температурах свыше  $200^{\circ}\text{C}$  и давлении менее  $5 \cdot 10^{-5}$  Па. Однако необходимо изучение влияния совокупности параметров, а также зависимости при различных концентрациях наполнителя.

## 3 Изготовление экспериментальных образцов

Исходные образцы МРЭ были изготовлены в лаборатории ГНЦ РФ АО ГНИ-ИХТЭОС и испытаны в вакууме. Испытания показали наличие большого потока выделяющихся газов, что не позволило достичь высокого вакуума в испытываемой камере с образцами. Было сделано допущение о присутствии большого количества побочных масел, которые также были обнаружены на стенках камеры [3].

Задача сводится к необходимости разработки такого состава полимера, чтобы он обладал необходимыми для виброизоляции механическими свойствами, а его газовыделение в вакууме было минимально и в нем не происходило значительного изменения механических свойств.

Основными компонентами магнитореологического эластомера являются силиконовая матрица и частицы карбонильного железа. Помимо них в состав входят – полиметилсилоксановая смазка (ПМС), отвердитель, петролейный эфир. ПМС необходим для разделения частиц мелкодисперсного порошка карбонильного радиотехнического железа (ГОСТ 13620-79) и для предотвращения появления агломератов. Петролейный эфир используется для удаления (выжигания) излишков масла при полимеризации. Однако, основываясь на предыдущих вакуумных испытаниях, был сделан вывод о значительной степени специфических газов, возможным источником которых может быть ПМС и петролейный эфир. Для сравнения механических свойств и выделяющихся газов, для анализа образовавшейся структуры принято решение об изготовлении образцов с использованием ПМС и эфира, а также без использования этих компонентов (таблица 1).

Таблица 1. Концентрация частиц наполнителя

Обознач.	Концентр. наполн., %	ПМС, %	Эфир, %	Компаун д%,	Отвердит . %
30Б	30	-	-	63,64	6,36
40Б	40	-	-	54,55	5,45
30С	30	0,6	6	57,64	5,76
40С	40	0,8	8	46,55	4,65

С учетом концентраций было изготовлено 8 образцов для испытаний на растяжение (ГОСТ Р 56785- 2015), по два каждого состава. Для формирования образцов использовалась плоская форма (рисунок 2). Процесс заливки и полимеризации мог проходить не равномерно и вызвать разброс толщины образцов. Для получения в дальнейшем сравнимых результатов все образцы были предварительно измерены – толщина и ширина рабочей зоны.

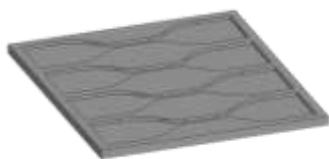


Рисунок 2. Твердотельная модель формы для образцов на растяжение

#### 4 Определение механических свойств

Все образцы были испытаны на электродинамической испытательной машине ElectroPuls E1000, предназначенной для статических и динамических испытаний широкого диапазона материалов и компонентов, в лаборатории кафедры РК-5 Прикладной механики (МГТУ им. Н.Э. Баумана). Для определения модуля упругости полимера на растяжение был проведен статический эксперимент на растяжение без разрыва, со скоростью растяжения 5 мм/ мин и удлинением на 15 мм.

По полученным экспериментальным данным построены графики зависимости удлинения от прилагаемой нагрузки. Данная зависимость имела линейный характер, что удовлетворяет закону Гука [4].

С целью получения сравнимых графиков, экспериментальные данные были преобразованы в зависимости напряжения от деформации. Полученные графики также имеют линейную зависимость. Для двух образцов, имеющих одинаковый состав, были построены усредненные прямые зависимости деформации от напряженности (рисунок 3).

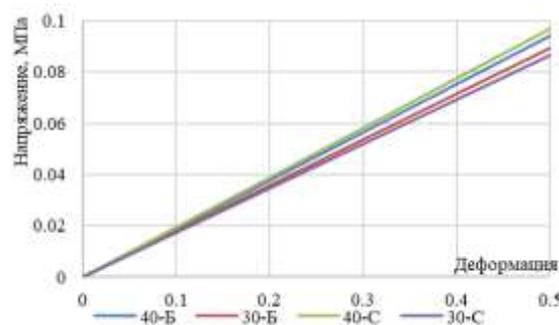


Рисунок 3. Усредненные графики зависимости напряжения от деформации для образцов с ПМС и без него

Для образцов получены следующие усредненные модули упругости: 40 - Б – 0,19 МПа (40% железа, без ПМС и эфира); 30 - Б – 0,17 МПа (30% железа, без ПМС и эфира); 40 - С – 0,19 МПа (40% железа, с ПМС и эфиром); 30 - С – 0,17 МПа (30% железа, с ПМС и эфиром). По графикам видно различие в наклоне для образцов с ПМС и без него, однако отличие их модулей упругости не превышает 12%. Также видно, что нельзя однозначно сказать, как влияет наличие ПМС и эфира в составе МРЭ на модуль упругости.

Таким образом, более подходящей концентрацией для системы активной виброизоляции, имеющей большой модуль упругости, считаем концентрацию наполнителя 40%. По результатам эксперимента нельзя однозначно сказать, как влияет ПМС, который может быть в процессе обезгаживания удален, на механические свойства, поэтому при дальнейших исследованиях характеристик МРЭ в условиях вакуума целесообразно использовать все рассмотренные в настоящей работе образцы.

## 5 Заключение

Новые образцы магнитореологического эластомера были изготовлены по ранее разработанной технологии. Полученные образцы были испытаны на растяжение на электродинамической испытательной машине без разрыва.

Определен модуль упругости для каждого из образцов и установлено, что при нормальной температуре упругие свойства МРЭ имеют линейный характер. При этом модули упругости для различных составов и концентраций рассматриваемого МРЭ отличаются незначительно. Влияние наличия ПМС и эфира на механические свойства МРЭ не выявлено.

В дальнейшем планируется проведение испытаний в вакууме – нагрев и обезгаживание, для сравнения потоков газов из образцов с различным составом и концентрацией, а также определение модуля упругости полимера после его обезгаживания.

## Список использованных источников

- [1] Bazinenkov, A. M., & Mikhailov, V. P. (2015). Active and semi active vibration isolation systems based on magnetorheological materials. *Procedia Engineering*, 106, 170-174.
- [2] «Temperature-dependent dynamic mechanical properties of magnetorheological elastomers under magnetic field». Benxiang Ju, Rui Tang, Dengyou Zhang, Bailian Yang, Miao Yu, Changrong Liao. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 374 (2015) 283–288
- [3] Иванова Д.А., Ротарь А.П., Базиненков А.М. (2019). Исследование газовыделения магнитореологического эластомера при прогреве в вакууме. *Материалы Девятой Российской студенческой научно-технической конференции*, 65-66.
- [4] Ефимов И.А., Иванова Д.А., Ротарь А.П. Исследование механических свойств магнитореологического эластомера после обезгаживания в вакууме// Двенадцатая Всероссийская конференция молодых учёных и специалистов (с международным

участием) «Будущее машиностроение России» (Москва, 24-27 сентября 2019г.): сборник докладов/Союз машиностроителей России, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет). – Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019 – С. 450-454.

**STUDY OF ELASTIC PROPERTIES OF A MAGNETO-RHEOLOGICAL ELASTOMER FOR VIBRO-INSULATION IN VACUUM**

**A.M. Bazinenkov,  
D.A. Ivanova,  
I.A.Efimov,  
A.P. Rotar**

BMSTU  
ul. Baumanskaya 2-ya, 5/1, Moscow  
105005  
ambazinenkov@bmstu.ru

*Magnetorheological elastomer is used in vibration isolation and damping systems; it is promising to use a platform of active vibration isolation in a vacuum to provide vibration protection for the research object. Polymer is a composite material whose rheological properties can change under the influence of a directed magnetic field. For the correct operation of the platform, the constancy of mechanical properties is necessary, which can change during degassing with increasing temperature. The paper presents the results of studies of the mechanical properties of MRE with various compositions prior to degassing in a vacuum. It was found that the elastic modulus of the polymer directly depends on the concentration of filler particles, and no dependence on the presence of surfactants was found.*

**Keywords:** *Active vibration isolation system; magneto-rheological elastomer; elastic modulus; mechanical properties; deformation; vacuum chamber*

**References**

- [1] Bazinenkov, A. M., & Mikhailov, V. P. (2015). Active and semi active vibration isolation systems based on magnetorheological materials. *Procedia Engineering*, 106, 170-174.
- [2] «Temperature-dependent dynamic mechanical properties of magnetorheological elastomers under magnetic field». Benxiang Ju, Rui Tang, Dengyou Zhang, Bailian Yang, Miao Yu, Changrong Liao. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 374 (2015) 283–288
- [3] Ivanova D.A., Rotar A.P., Bazinenkov A.M. (2019). Study of gas evolution of a magnetorheological elastomer during heating in a vacuum. *Materials of the Ninth Russian Student Scientific and Technical Conference*, 65-66.
- [4] Efimov I.A., Ivanova D.A., Rotar A.P. A study of their own magnetorheological elastomer after degassing in a vacuum // *Twelfth All-Russian Conference of Young Scientists and Specialists (with international participation) “The Future Engineering of Russia”* (Moscow, September 24-27, 2019): collection of reports / Russian Engineering Union, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman (National Research University). - Moscow: Publishing house of MGTU im. N.E. Bauman, 2019 - S. 450-454.